Министерство образования и науки Российской Федерации
Самарский государственный технический университет

Материалы
XI Всероссийской научной конференции
с международным участием
«Математическое моделирование и краевые задачи»

(27–30 мая 2019 г., Самара, Россия)

Том 2

Под редакцией В. П. Радченко

Самара
Самарский государственный технический университет
2019

УДК 517.958
ББК 22.251я431+95.4
М341

Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия): в 2-х томах. Т. 2. / под ред. В. П. Радченко. — Самара: СамГТУ, 2019. — 147 с.

ISBN 978–5–7964–2176–5 (Т. 2)
ISBN 978–5–7964–2174–1

Сборник включает материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», состоявшейся 27–30 мая 2019 г. в Самарском государственном техническом университете.

УДК 517.958
ББК 22.251я431+95.4

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель:
В. П. Радченко, д.ф.-м.н., Самара

Заместители председателя:
Э. Я. Рапопорт, д.т.н., Самара
А. А. Андреев, к.ф.-м.н., Самара

Ученые секретари:
О. С. Афанасьева, к.т.н., Самара
М. Н. Саушкин, к.ф.-м.н., Самара

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель программного комитета:
В. П. Радченко, д.ф.-м.н., Самара

Заместитель председателя программного комитета:
Ю. Н. Радаев, д.ф.-м.н., Москва

Ученые секретари программного комитета:
Е. В. Мурашкин, к.ф.-м.н., Москва
М. Н. Саушкин, к.ф.-м.н., Самара

ISBN 978–5–7964–2176–5 (Т. 2)
ISBN 978–5–7964–2174–1

Члены программного комитета:

С. А. Авдонин, д.ф.-м.н., Фэрбанкс, Аляска, США
В. Н. Акопян, д.ф.-м.н., Ереван, Армения
Б. Д. Аннин, академик РАН, д.ф.-м.н., Новосибирск
В. И. Астафьев, д.ф.-м.н., Самара
В. И. Батищев, д.т.н., Самара
А. А. Буренин, член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., Комсомольск-на-Амуре
П. А. Вельмисов, д.ф.-м.н., Ульяновск
В. Э. Вильдеман, д.ф.-м.н., Пермь
А. И. Жданов, д.ф.-м.н., Самара
А. Н. Зарубин, д.ф.-м.н., Орел
А. Ф. Заусаев, д.ф.-м.н., Самара
В. Е. Зотеев, д.т.н., Самара
Л. А. Игумнов, д.ф.-м.н., Нижний Новгород
В. А. Ковалев, д.ф.-м.н., Москва
А. И. Кожанов, д.ф.-м.н., Новосибирск
Л. Ю. Коссович, д.ф.-м.н., Саратов
В. А. Кудинов, д.ф.-м.н., Самара
П. К. Кузнецов, д.т.н., Самара
А. М. Локощенко, д.ф.-м.н., Москва
О. И. Маричев, д.ф.-м.н., Шампейн, Иллинойс, США
А. А. Маркин, д.ф.-м.н., Тула
А. Н. Миронов, д.ф.-м.н., Елабуга
М. В. Ненашев, д.т.н., Самара
Е. В. Радкевич, д.ф.-м.н., Москва
В. Ф. Павлов, д.т.н., Самара
Л. С. Пулькина, д.ф.-м.н., Самара
А. В. Саакян, д.ф.-м.н., Ереван, Армения
А. М. Седлецкий, д.ф.-м.н., Москва
А. П. Солдатов, д.ф.-м.н., Москва
В. В. Стружанов, д.ф.-м.н., Екатеринбург
А. А. Ташкинов, д.ф.-м.н., Пермь
А. И. Хромов, д.ф.-м.н., Комсомольск-на-Амуре
А. И. Шашкин, д.ф.-м.н., Воронеж

Локальный организационный комитет:

• В. П. Радченко • Э. Я. Рапопорт • А. А. Андреев • О. С. Афанасьева • А. А. Заусаев • Е. Н. Огородников • Е. Ю. Арланова • В. Е. Зотеев • П. К. Кузнецов

Содержание

Дифференциальные уравнения и краевые задачи

Информационные технологии в математическом моделировании

Дифференциальные уравнения и краевые задачи

Краевая задача для системы уравнений гиперболического типа высокого порядка

А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

В статье методом Римана построено регулярное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений третьего порядка. Указанное решение найдено с помощью матрицы Римана. Матрица Римана построена через гипергеометрические функции матричного аргумента.

Ключевые слова: гиперболическое дифференциальное уравнение, система гиперболических дифференциальных уравнений высокого порядка, задача Коши, метод Римана, матрица Римана, гипергеометрическая функция.

Введение. В теории дифференциальных уравнений в частных производных немаловажную роль играет понятие характеристики уравнения. Известно, что краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных с кратными характеристиками могут быть решены методом Римана.

1. Решение задачи Коши. В плоскости $\{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ независимых переменных будем рассматривать систему уравнений гиперболического типа третьего порядка в частных производных, которая не содержит производные порядка меньше третьего,

$$MU \equiv U_{xxy} + \Omega U = 0, \tag{1}$$

где $U\,(x,\, y)$ — искомая m-мерная вектор-функция, Ω — постоянная действительная матрица размера $(m \times m)$. Уравнения системы (1) имеют характеристику $x = C_i$ и характеристику $y = C_j$, $C_i,\, C_j \in \mathbb{R}$, которая является двукратной. Таким образом, каждое уравнение системы (1) является слабо гиперболическим.

Задача Коши. *Найти регулярное решение $U(x, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ системы уравнений (1), которое удовлетворет следующим условиям на линии $y = x$, являющейся нехарактеристической:*

$$U\,(x,\, y)\,|_{y=x} = A(x),$$

Образец для цитирования
Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Краевая задача для системы уравнений гиперболического типа высокого порядка / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 8–10.

Сведения об авторах

Александр Анатольевич Андреев кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: andre01071948@yandex.ru

Юлия Олеговна Яковлева http://orcid.org/0000-0002-9839-3740
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial n}\Big|_{y=x} = B(x),$$
$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial n^2}\Big|_{y=x} = C(x). \tag{2}$$

$A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^2(\mathbb{R})$ являются заданными вектор-функциями, а $n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — нормалью к нехарактеристической линии.

На нехарактеристическую линию системы дифференциальных гиперболических уравнений третьего порядка накладываются такие же ограничения, как и для гиперболического уравнения второго порядка. Известно [1], что нехарактеристическая линия не должна дважды пересекать любую характеристику, принадлежащую любому другому семейству.

В области D решение $U\,(x,\,y)$ задачи Коши (2) системы уравнений (1) называется регулярным, если оно имеет все непрерывные частные производные, которые входят во все уравнения системы (1), и удовлетворяет системе (1) и условиям задачи Коши (2) в обычном смысле.

Рассмотрим решение задачи Коши (2) методом Римана.

Сопряженным оператором по Лагранжу для $MU \equiv U_{xxy} + \Omega U$ является оператор $M^*V \equiv -V_{xxy} + V\Omega$, где $V\,(x_0,\,y_0; x,\,y)$ — матрица размера $(m \times m)$.

Матрицей Римана для указанной системы уравнений (1) будем называть решение $V = V(x_0,\,y_0; x,\,y)$ задачи

$$M^*V = 0,$$
$$V(x_0,\,y_0; x,\,y)|_{x=x_0} = \Theta,$$
$$V(x_0,\,y_0; x,\,y)|_{y=y_0} = (x - x_0)\,E,$$
$$V_x(x_0,\,y_0; x,\,y)|_{x=x_0} = E,$$

где $(x_0,\,y_0)$ – любая точка, принадлежащая плоскости $\{(x,\,y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$. E, Θ являются единичной и нулевой матрицей размера $(m \times m)$ соответственно.

В работах [2, 3] функция Римана $v(x_0,\,y_0; x,\,y)$ определена как решение специальной задачи Гурса. Доказаны существование и единственность функции Римана $v(x_0,\,y_0; x,\,y)$. Обобщение этих результатов, приводит к утверждению о существовании и единственности матрицы Римана $V(x_0,\,y_0; x,\,y)$.

Определение обобщенной гипергеометрической функции приведено в работах [4, 5]. Тогда получим, что матрица Римана имеет вид

$$V(x_0,\,y_0; x,\,y) = (x - x_0)\;{}_0F_2\left(1;\,\frac{3}{2};\,\left(\frac{(x-x_0)^2(y-y_0)}{4}\right)\Omega\right).$$

Используя полученную матрицу Римана, после некоторых преобразований получим, что решение задачи Коши (2) системы уравнений (1) принимает вид

$$U\,(x_0,\,y_0) = A(y_0) - \frac{1}{4}\int_{x_0}^{y_0}(x - x_0)\,{}_0F_2\left(1,\,\frac{3}{2};\,\tau\Omega\right)(A''(x) - C(x))dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{y_0}((x-x_0)^2 + 1)\,{}_0F_2\left(1,\,\frac{3}{2};\,\tau\Omega\right)(A(x) + A'(x) + B(x))dx -$$

$$-\frac{1}{6}\int_{x_0}^{y_0}(x-x_0)^2(x-y_0)\Omega\,{}_0F_2\left(2,\,\frac{5}{2};\,\tau\Omega\right)(A'(x)+B(x))dx-$$
$$-\frac{1}{60}\int_{x_0}^{y_0}(x-x_0)^4(x-y_0)\Omega^2\,{}_0F_2\left(3,\,\frac{7}{2};\,\tau\Omega\right)A(x)dx,$$

где $\tau=\frac{(x-x_0)^2(x-y_0)}{4}$.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1972. 736 с.
2. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *ДАН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // *Изв. вузов. Математика*, 2002. Т. 5. С. 23–30.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1966. 296 с с.
5. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Матричные интегро-дифференциальные операторы и их применение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999. № 7. С. 27–37. doi: 10.14498/vsgtu206.

The boundary value problem for the system of the hyperbolic differential equations of the high order

A. A. Andreev, J. O. Yakovleva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In the paper the solution of Cauchy problem for the system of the differential equations of the third order is received on the basis of the Riemann's method. This solution is constructed by the Riemann's matrix. The matrix of Riman is expressed through hypergeometrical functions of matrix argument

Keywords: hyperbolic differential equation, system of the hyperbolic differential equations of the high order, Cauchy problem, Riemann's method, Riemann's matrix, hypergeometrical function.

Please cite this article in press as:
Andreev A. A., Yakovleva J. O. The boundary value problem for the system of the hyperbolic differential equations of the high order, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 8–10 (In Russian).

Authors' Details:

Aleksandr A. Andreev Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: andre01071948@yandex.ru

Julia O. Yakovleva http://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of High Mathematics;
e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Об одной краевой задаче со смещением с операторами дробного интегро-дифференцирования для уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка

Ж. А. Балкизов

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Аннотация

В работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка с вырождающимся гиперболическим оператором, когда в качестве граничного условия задана весовая линейная комбинация с переменными коэффициентами производных дробного порядка от значений искомой функции на независимых характеристиках. Найдены достаточные условия существования и единственности регулярного решения задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, оператор дробного интегродифференцирования, задача со смещением.

Введение. Впервые задачи со смещением для различных типов уравнений были сформулированы и исследованы в работах [1–3]. Подобные задачи возникают при изучении вопросов тепло- и массообмена в капиллярно-пористых средах, при математическом моделировании задач газовой динамики и нелокальных физических процессов, при изучении процессов размножения клеток, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде. В связи с чем исследованию краевых задач со смещением для различных типов и различных порядков уравнений уделяют внимание много авторов. Достаточно полная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями, приведена в монографиях [4–7].

В данной работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождающимся гиперболическим оператором, когда в качестве граничного условия задана весовая линейная комбинация с переменными коэффициентами производных дробного порядка от значений искомой функции на независимых характеристиках. Найдены достаточные условия существования и единственности регулярного решения задачи. Среди работ, близко примыкающих к исследуемой, отметим работы [8–11].

Образец для цитирования
Балкизов Ж. А. Об одной краевой задаче со смещением с операторами дробного интегродифференцирования для уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 11–14.

Сведения об авторе
Жираслан Анатольевич Балкизов http://orcid.org/0000-0001-5329-7766
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; отдел уравнений смешанного типа; e-mail: Giraslan@yandex.ru

Постановка задачи. На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} - u_y - f, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f = f(x,y)$ — заданная функция; a, m — заданные числа, причем $m > 0$, $|a| \leqslant m/2$; $u = u(x,y)$ — искомая функция.

Уравнение (1) рассматривается в области Ω, ограниченной характеристиками AC: $x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и CB: $x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точки $C = \big(r/2, -r/2\big)$ и проходящими через точки $A = \big(0,0\big)$ и $B = (r,0)$ соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках A, B, $A_0 = (0,h)$, $B_0 = (r,h)$, $h > 0$, при $y > 0$.

Введем обозначения:

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}, \quad J = \{(x,0): \quad 0 < x < r\},$$
$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J, \quad \alpha = \frac{m-2a}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2a}{2(m+2)},$$
$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}x\right)^{2(m+2)}\right), \quad \theta_r(x) = \left(\frac{r+x}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}(r-x)\right)^{2(m+2)}\right)$$

и будем считать, что $f \in C\big(\bar{\Omega}\big)$. Из свойств чисел a и m очевидно следует, что $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $C\big(\bar{\Omega}\big) \cap C^1(\Omega) \cap C^2\big(\Omega_1\big) \cap C^2_x\big(\Omega_2\big)$, u_x, $u_y \in L_1(J)$, удовлетворяющую уравнению (1).

В работе исследована следующая

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(r,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y < h,$$
$$a(x)x^\alpha D^{1-\beta}_{0x}\big[u(\theta_0(t))\big] + b(x)(r-x)^\beta D^{1-\alpha}_{rx}\big[u(\theta_r(t))\big] = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r,$$

где D^δ_{cx} — оператор дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегродифференцирования порядка δ [5, с. 28]; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Основной результат. Доказана следующая

Теорема. *Пусть заданные функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$; $a(x)$, $b(x)$, $\psi(x)$ обладают свойствами:*

$$\varphi_1(y), \quad \varphi_2(y) \in C[0,h]; \quad a(x),\, b(x),\, \psi(x) \in C^1[0,r] \cap C^2]0,r[,$$
$$a(x)b(x) > 0, \quad \left[\frac{b(x)}{a(x)}\right]' > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant r.$$

Тогда существует единственное регулярное решение задачи 1.

Заключение. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка с вырождающимся гиперболическим оператором, когда в качестве граничного условия задана весовая линейная комбинация с переменными коэффициентами производных дробного порядка от значений искомой функции на независимых характеристиках.

Библиографический список

1. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на линии перехода // *Ученые записки Казанского университета*, 1962. Т. 122, № 3. С. 3–16.
2. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Доклады академии наук СССР*, 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.
3. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Дифференц. уравнения*, 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
4. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.
5. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
6. Репин О. А., Маричев О. И. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.* Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992. 161 с.
7. Салахитдинов М. С. *Уравнения смешанно-составного типа.* Ташкент: ФАН, 1974. 165 с.
8. Килбас А. А., Репин О. А. Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 1998. Т. 34, № 6. С. 799–805.
9. Репин О. А., Кумыкова С. К. Внутренне-краевая задача с операторами Римана–Лиувилля для уравнения смешанного типа третьего порядка // *Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 43–53. doi: 10.14498/vsgtu1461.
10. Балкизов Ж. А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // *Вестник КРАУНЦ. Серия Физ.-мат. науки*, 2018. № 3(23). С. 19–26.
11. Балкизов Ж. А. Об одной краевой задаче типа задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с тремя смещениями в гиперболической части области // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, физика*, 2019. Т. 51, № 1. С. 5–14.

On a boundary-value problem with shift and fractional integro-differentiation operators for a second order parabolic-hyperbolic equation

Zh. A. Balkizov

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, 89 A, Shortanov st., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we investigated a boundary value problem with shift for a nonhomogeneous second order parabolic-hyperbolic type equation with a degenerate hyperbolic operator, when a weight linear combination with variable coefficients of fractional derivatives of the values of the desired function on independent characteristics is given as the boundary condition. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a regular solution of the problem are found.

Keywords: equation of mixed type, fractional integro-differentiation operator, problem with shift.

Please cite this article in press as:
Balkizov Zh. A. On a boundary-value problem with shift and fractional integro-differentiation operators for a second order parabolic-hyperbolic equation, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 11–14 (In Russian).

Author's Details:

Zhiraslan A. Balkizov http://orcid.org/0000-0001-5329-7766
Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Dep. of Mixed Type Equations;
e-mail: Giraslan@yandex.ru

Задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения

А. В. Богатов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Россия, 443086, Самара, ул. Московское шоссе, д. 34.

Аннотация

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, проведено доказательство существования и единственности решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия.

Введение. В статье изучается задача для одномерного гиперболического уравнения с нелокальным интегральным условием первого рода.

Несмотря на то, что на сегодняшний день разработан не один метод решения нелокальных задач, мы воспользовались одним из самых универсальных – методом вспомогательных задач. Суть метода вспомогательных задач в следующем: сначала решается задача с классическими (но неизвестными) граничными условиями, а затем производится попытка поиска граничных условий как решения операторного уравнения, полученного в результате применения нелокального условия к решению вспомогательной задачи. Именно этим методом, хотя он тогда еще не имел названия, доказана разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности в статье Дж. Р. Кэннона [1]. Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений рассматривались многими авторами. Отметим здесь статьи [2–4], и обратим внимание на список литературы в них. Заметим, что задачи с интегральными условиями часто можно трактовать как задачи управления. Задачам управления для уравнения колебания струны посвящен ряд статей В. А. Ильина [5, 6].

В нашей статье рассматривается задача для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу. В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ найти решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \tag{1}$$

Образец для цитирования
Богатов А. В. Задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 15–20.

Сведения об авторе
Андрей Владимирович Богатов http://orcid.org/0000-0001-5797-1930
магистрант; каф. дифференциальных уравнений и теории управления;
e-mail: andrebogato@mail.ru

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_x(0,t) = 0 \tag{2}$$

и нелокальному условию

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = g_i(t) \quad (i = 1,2). \tag{3}$$

Стоит отметить, что (3) — операторное уравнение первого рода, которое является некорректно поставленной задачей. Для ее решения необходимо установить ограничения на ядро и правую часть.

Разрешимость задачи.

Теорема. *Если* $K_i \in C'[0,l]$, $\triangle = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0$, $f \in C'(\bar{Q}_T)$, *при всех* $T \leqslant l$, *то существует единственное решение* $u \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ *задачи* (1)–(3).

Доказательство. На данный момент известен не один метод решения задач с нелокальными условиями, но мы применим метод вспомогательных задач, поскольку он применим в рамках поставленной задачи и является одним из самых надежных методов.

В качестве вспомогательной задачи рассмотрим первую начально-краевую задачу с неоднородными краевыми условиями

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),$$
$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),\ \mu_1(t) \in W_2^2(0,T),\ \mu_i(t) = \mu_i'(t),\ t \leqslant 0. \tag{4}$$

Будем искать ее решение в виде суммы $u(x,t) = u^0(x,t) + v(x,t)$, где $u^0(x,t)$ — решение задачи для однородного уравнения

$$\begin{cases} u^0_{tt} - a^2 u^0_{xx} = 0, \\ u^0(0,t) = \mu_1(t), \\ u^0(l,t) = \mu_2(t), \\ u^0(x,0) = 0, \\ u^0_t = 0, \end{cases} \tag{5}$$

а $v(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t), \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Для решения задачи (5) воспользуемся приемом, предложенным в статье [2]. Пусть функции $\mu_i \in W_2^2(0,T)$, $\mu_i(t) = 0$ при $t \leqslant 0$.

Тогда решение задачи (5) можно представить следующим образом:

$$u^0(x,t) = \mu_1(t-x) + \mu_2(t+x-l) \quad \text{при} \quad T \leqslant l.$$

Для решения задачи (6) применим классический метод разделения переменных, что приведет к представлению решения

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где

$$V_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(\theta) \sin \frac{\pi n}{l}(t-\tau) d\tau.$$

Тогда решение вспомогательной задачи (4) имеет вид

$$u(x,t) = \mu_1(t-x) + \mu_2(t+x-l) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{7}$$

Однако функции $\mu_i(t)$ нам не известны. Будем пытаться их найти, применив к (7) интегральные условия (4).

В результате мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_1(x)\mu_1(t-x)dx + \int_0^l K_1(x)\mu_2(t+x-l)dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \int_0^l K_1(x) \sin \frac{\pi n x}{l} = g_1(t), \\
&\int_0^l K_2(x)\mu_1(t-x)dx + \int_0^l K_2(x)\mu_2(t+x-l)dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \int_0^l K_2(x) \sin \frac{\pi n x}{l} = g_2(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Теперь нам нужно выяснить, найдутся ли функции, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (8). При положительном ответе на этот вопрос, формула (7) даст решение поставленной нелокальной задачи.

В (8) сделаем замену переменных, положив $\xi = t - x$, $\xi = x + t - l$ в первых двух интегралах каждого уравнения. Тогда, учитывая свойства функции $\mu_i(t)$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_1(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^l K_1(\xi-t+l)\mu_2(\xi)d\xi + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \int_0^l K_1(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = g_1(t), \\
&\int_0^l K_2(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^l K_2(\xi-t+l)\mu_2(\xi)d\xi + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \int_0^l K_2(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = g_2(t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Дифференцируя уравнения (9) по t, в силу условия теоремы получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned}
&K_1(0)\mu_1(t) + K_1(l)\mu_2(t) + \int_0^t K_1'(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi - \\
&- \int_0^t K_1'(\xi - t + l)\mu_2(\xi)d\xi = \bar{g}_1(t), \\
&K_2(0)\mu_1(t) + K_2(l)\mu_2(t) + \int_0^t K_2'(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi - \\
&- \int_0^t K_2'(\xi - t + l)\mu_2(\xi)d\xi = \bar{g}_2(t),
\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\bar{g}_i(t) = g_i'(t) - \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \int_0^l K_2(x) \sin\frac{\pi n x}{l} dx.$$

Так как по условию теоремы $\triangle = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0$, то (10) можно разрешить относительно $\mu_i(t)$:

$$\begin{aligned}
&\mu_1(t) + \int_0^t \aleph_{11}(\xi,t)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^t \aleph_{12}(\xi,t)\mu_2(\xi)d\xi = g_1(t), \\
&\mu_2(t) + \int_0^t \aleph_{21}(\xi,t)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^t \aleph_{22}(\xi,t)\mu_2(\xi)d\xi = g_2(t),
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
H_{11}(\xi,t) &= \frac{K_1'(t-\xi)K_2(l) - K_2'(t-\xi)K_1(l)}{\triangle}, \\
H_{12}(\xi,t) &= \frac{K_2'(t-\xi)K_1(l) - K_1'(t-\xi)K_2(l)}{\triangle}, \\
H_{21}(\xi,t) &= \frac{K_1'(t-\xi)K_2(l) - K_2'(t-\xi)K_1(l)}{\triangle}, \\
H_{22}(\xi,t) &= \frac{K_1(l)K_2'(t-\xi) - K_2(l)K_1'(t-\xi)}{\triangle}, \\
G_1(t) &= \frac{\bar{g}_1(t)K_2(l) - \bar{g}_2(t)K_1(l)}{\triangle}, \\
G_2(t) &= \frac{\bar{g}_1(t)K_2(l) - \bar{g}_2(t)K_1(l)}{\triangle}.
\end{aligned}$$

В силу условий теоремы нетрудно убедиться в том, что $H_{ij}(\xi,t)$ ограничены, $G_i(t)$ интегрируемы на [0,T]. Тогда система (11) однозначно разрешима [7]. □

Выводы. Итак, функции $\mu_i(t)$ однозначно определены из системы интегральных уравнений, что является следствием применения интегральных условий. Тогда решение вспомогательной задачи с найденными функциями

$\mu_i(t)$ в качестве граничных условий представляет собой решение поставленной задачи.

Библиографический список

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. vol. 21, no. 2. pp. 155–160.
2. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // *Изв. вузов. Математика*, 2012. № 1. С. 74–83.
3. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.
4. Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equation // *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011. vol. 5, no. 1. pp. 31–37.
5. Ильин В. А., Тихомиров В. В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // *Дифференц. уравнения*, 1999. Т. 35, № 5. С. 692–704.
6. Ильин В. А., Моисеев Е. И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями. // *Дифференц. уравнения*, 2000. Т. 36, № 5. С. 656–661.
7. Михлин С. Г. *Линейные уравнения в частных производных.* М.: Высшая школа, 1977. 423 с.

A problem with integral condition for one-dimensional hyperbolic equation

A. V. Bogatov

Samara National Research University
named after Academician S. P. Korolyov,
34, Moskovskoe shosse st., Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we study a nonlocal problem with an integral condition for a one-dimensional hyperbolic equation arising in the study of vibrations of the rod. The conditions for the input data providing unambiguous solvability of the problem are obtained, the proof of the existence and uniqueness of the solution of the problem is carried out.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions.

Please cite this article in press as:
Bogatov A. V. A problem with integral condition for one-dimensional hyperbolic equation, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 15–20 (In Russian).

Author's Details:

Andrew V. Bogatov http://orcid.org/0000-0001-5797-1930
Postgraduate Student; Dept. of Differential Equations and Control Theory; e-mail: andrebogato@mail.ru

Задача с интегральными условиями второго рода для одномерного гиперболического уравнения

А. В. Богатов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Россия, 443086, Самара, ул. Московское шоссе, д. 34.

Аннотация

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, проведено доказательство существования и единственности решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия.

В данный момент одним из интенсивно развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений являются задачи с нелокальными условиями. Отличительной особенностью нелокальных условий является то, что задаваемые условия связывают значения искомого решения или его производных в различных точках границы и каких-либо внутренних точках. Особый интерес представляют задачи с интегральными условиями в силу того, что они являются обобщением локальных и дискретных нелокальных условий. В случае невозможности измерений на границе области протекания процесса возникают нелокальные интегральные условия. Также, используя нелокальные интегральные условия, можно построить математическую модель процесса неразрушающего контроля и, как следствие, управлять, например, напряженно-деформированным состоянием. Следует отметить, что стандартные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными неприменимы в случае задач с нелокальными условиями в силу того, что область определения оператора, порождаемого нелокальной задачей, как правило, не является плотной в L_2, что, в свою очередь, делает актуальной разработку методов исследования разрешимости нелокальных задач.

Рассмотрим следующую задачу: в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ найти решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \tag{1}$$

Образец для цитирования
Богатов А. В. Задача с интегральными условиями второго рода для одномерного гиперболического уравнения / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 21–23.

Сведения об авторе
Андрей Владимирович Богатов http://orcid.org/0000-0001-5797-1930
магистрант; каф. дифференциальных уравнений и теории управления;
e-mail: andrebogato@mail.ru

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(0,t)=\psi(x), \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$u(0,t)+\int_0^l K_1(x)u(x,t)dx=g_1(t), \quad u(l,t)+\int_0^l K_2(x)u(x,t)dx=g_2(t). \tag{3}$$

Теорема. *Если* $K_i\in C'[0,l]$, $\triangle=K_1(0)K_2(l)-K_1(l)K_2(0)\neq 0$, $f\in C(\bar{Q}_T)$, *при всех* $T\leqslant l$, *то существует единственное решение* $u\in C^2(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$ *задачи* (1)–(3)

Для доказательства воспользуемся методом вспомогательных задач.

В качестве вспомогательной задачи рассмотрим первую начально-краевую задачу с неоднородными краевыми условиями

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),$$
$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad \mu_1(t)\in W_2^2(0,T), \quad \mu_i(t)=\mu_i'(t)=0, t\leqslant 0.$$

Будем искать ее решение в виде суммы $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, где $v(x,t)$ — решение задачи для однородного уравнения

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \\ v(0,t)=\mu_1(t), \\ v(l,t)=\mu_2(t), \\ v(x,0)=0, \\ v_t(x,0)=0, \end{cases}$$

а $w(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=f(x,t), \\ w(0,t)=w(l,t)=0, \\ w(x,0)=\phi(x), \\ w_t(x,0)=\psi(x). \end{cases}$$

В [1] была рассмотрена задача с интегральным условием первого рода, для доказательства разрешимости которой также был применен метод вспомогательных задач, и мы воспользуемся тем же приемом решения вспомогательной задачи. В итоге получим:

$$u(x,t)=\mu_1(t-x)+\mu_2(t+x-l)+\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{4}$$

Применив к (4) интегральные условия (3), придем к системе интегральных уравнений:

$$\mu_1(t)+\int_0^l K_1(x)\big[\mu_1(t-x)+\mu_2(t+x-l)\big]dx=g_1(t),$$
$$\mu_2(t)+\int_0^l K_2(x)\big[\mu_1(t-x)+\mu_2(t+x-l)\big]dx=g_2(t).$$

Введя замену интегрирования в первом интеграле $\xi = t - x$, а во втором $\xi = t + x - l$, получим:

$$\mu_1(t) + \int_0^t K_1(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^t K_1(\xi - t + l)\mu_2(\xi)d\xi = g_1(t),$$
$$\mu_2(t) + \int_0^t K_2(t-\xi)\mu_1(\xi)d\xi + \int_0^t K_2(\xi - t + l)\mu_2(\xi)d\xi = g_2(t).$$

Теперь мы пришли к системе уравнений Вольтерра второго рода. Из условий теоремы легко видеть, что ядра интегральных уравнений ограничены в основном квадрате, а правые части непрерывны. Известно [2], что существует единственное решение, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ этой системы . Но тогда решение вспомогательной задачи с краевыми условиями $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ будет решением поставленной нелокальной задачи.

Библиографический список

1. Богатов А. В. Задача с интегральным условием для одного гиперболического уравнения // *Вестник Самарского университета, естественнонаучная серия*, 2018. Т. 24, № 4. С. 7–12.
2. Михлин С. Г. *Линейные уравнения в частных производных.* М.: Высшая школа, 1977. 423 с.

A problem with integral condition of the second kind for one-dimensional hyperbolic equation

A. V. Bogatov

Samara National Research University
named after Academician S. P. Korolyov,
34, Moskovskoe shosse st., Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we study a nonlocal problem with an integral condition of the second kind for a one-dimensional hyperbolic equation arising in the study of vibrations of the rod. The conditions for the input data providing unambiguous solvability of the problem are obtained, the proof of the existence and uniqueness of the solution of the problem is carried out.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions.

Please cite this article in press as:
Bogatov A. V. A problem with integral condition of the second kind for one-dimensional hyperbolic equation, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 21–23 (In Russian).

Author's Details:

Andrew V. Bogatov http://orcid.org/0000-0001-5797-1930
Postgraduate Student; Dept. of Differential Equations and Control Theory; e-mail: andrebogato@mail.ru

Об эллиптической задаче в тонком конусе

В. Б. Васильев, Ш. Х. Кутаиба, О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Институт инженерных и цифровых технологий,
Россия, 308015, Белгород, улица Победы, 85.

Аннотация

Рассматривается эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в плоском секторе с дополнительным интегральным условием. Используя формулу для общего решения, изучен предельный случай, когда раствор угла сектора стремится к нулю. В работе показано, что функция в граничном условии не может быть произвольной, она должна удовлетворять определенному функциональному сингулярному интегральному уравнению.

Ключевые слова: интегральное условие, псевдодифференциальное уравнение, эллиптический оператор.

1. Эллиптические псевдодифференциальные уравнения в области с особыми точками на границе были изучены в работе [1]. С учетом локального принципа, рассмотрим модельное уравнение [2–4]

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \tag{1}$$

где C выпуклый конус в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, A представляет собой псевдодифференциальный оператор,

$$(Au)(x) = \int_C \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i(x-y)\cdot\xi} u(y) d\xi dy, \quad x \in C,$$

символ $A(\xi)$ которого удовлетворяет условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha.$$

Основная проблема заключается в получении условий однозначной разрешимости для уравнения (1) в соответствующих функциональных пространствах

Образец для цитирования
Васильев В. Б., Кутаиба Ш. Х.,Чернова О. В. Об эллиптической задаче в тонком конусе / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 24–27.

Сведения об авторах

Владимир Борисович Васильев http://orcid.org/0000-0001-9351-8084
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; кафедра дифференциальных уравнений; e-mail: vbv57@inbox.ru

Шабан Хасан Кутаиба; аспирант; кафедра дифференциальных уравнений;
e-mail: 1167542@bsu.edu.ru

Ольга Викторовна Чернова http://orcid.org/0000-0002-4175-5448
старший преподаватель; кафедра дифференциальных уравнений;
e-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru

или условия обратимости для оператора A. Для описания таких условий было введено [1] понятие волновой факторизации для эллиптического символа . В данной работе рассматривается простой плоский случай, когда необходимо добавочное условие для получения единственного решения.

2. Для двумерного случая при условии $1/2 < æ - s < 3/2$, где æ-индекс волновой факторизации [1], s-показатель пространства Соболева— Слободецкого $H^s\big(C^a_+\big)$ [1, 5], $C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\}$. Пусть для простоты $v \equiv 0$. Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1], то можно показать [4, 6] что общее решение уравнения (1) в пространстве Соболева— Слободецкого $H^s\big(C^a_+\big)$ в образах Фурье имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\tilde{c}_0\big(\xi_1 + a\xi_2\big) + \tilde{c}_0\big(\xi_1 - a\xi_2\big)}{2A_{\neq}\big(\xi_1, \xi_2\big)} + \\ + A^{-1}_{\neq}\big(\xi_1, \xi_2\big)\left(v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}\right),$$

где c_0 — произвольная функция из $H^{s-æ+1/2}(\mathbb{R})$. Обозначим

$$v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0\big(\xi_1 + a\xi_2\big),\ v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0\big(\xi_1 - a\xi_2\big). \tag{2}$$

Тогда получим

$$\tilde{u}\big(\xi_1, \xi_2\big) = \frac{\tilde{c}_0\big(\xi_1 + a\xi_2\big) + \tilde{c}_0\big(\xi_1 - a\xi_2\big) + \tilde{d}_0\big(\xi_1 + a\xi_2\big) - \tilde{d}_0\big(\xi_1 - a\xi_2\big)}{2A_{\neq}\big(\xi_1, \xi_2\big)} \equiv \\ \equiv \frac{\tilde{c}\big(\xi_1 + a\xi_2\big) + \tilde{d}\big(\xi_1 - a\xi_2\big)}{2A_{\neq}\big(\xi_1, \xi_2\big)}, \tag{3}$$

где $\tilde{c}\big(\xi_1 + a\xi_2\big) \equiv \tilde{c}_0\big(\xi_1 + a\xi_2\big) + \tilde{d}_0\big(\xi_1 + a\xi_2\big)$, $\tilde{d}\big(\xi_1 - a\xi_2\big) \equiv \tilde{c}_0\big(\xi_1 - a\xi_2\big) - \tilde{d}_0\big(\xi_1 - a\xi_2\big)$.

Предположим, что нам известен интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\big(x_1, x_2\big)dx_2 \equiv g(x_1). \tag{4}$$

Для преобразования Фурье это будет означать следующее: $\tilde{u}(\xi_1, 0) = \tilde{g}(\xi)$ и согласно формуле (2) имеем $\dfrac{\tilde{c}_0\big(\xi_1\big)}{A_{\neq}\big(\xi_1, 0\big)} = \tilde{g}\big(\xi_1\big)$. Таким образом, по крайней мере формально, мы можем найти функцию $\tilde{c}_0(\xi_1) = A_{\neq}\big(\xi_1, 0\big)\tilde{g}\big(\xi_1\big)$ и затем, используя формулы (2), найти $\tilde{d}_0\big(\xi_1\big)$. Следовательно, формула (3) дает нам решение уравнения (1). Окончательно решение уравнения (1) при условии (4) примет вид

$$\tilde{u}\big(\xi_1, \xi_2\big) = \frac{A_{\neq}\big(\xi_1 + a\xi_2, 0\big)\tilde{g}\big(\xi_1 + a\xi_2\big) + A_{\neq}\big(\xi_1 - a\xi_2, 0\big)\tilde{g}\big(\xi_1 - a\xi_2\big)}{2A_{\neq}\big(\xi_1, \xi_2\big)} +$$

$$\frac{1}{2A_{\neq}(\xi_1,\xi_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1+a\xi_2-\eta}-\frac{1}{2A_{\neq}(\xi_1,\xi_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1-a\xi_2-\eta}.$$

Тогда, вводя обозначение $a_{\neq}(t_1,t_2)\equiv A_{\neq}\left(\frac{t_1+t_2}{2},\frac{t_1-t_2}{2a}\right)$, $\tilde{U}(t_1,t_2)\equiv$ $\equiv\tilde{u}\left(\frac{t_1+t_2}{2},\frac{t_1-t_2}{2a}\right)$, можно записать

$$\tilde{U}(t_1,t_2)=\frac{A_{\neq}(t_1,0)\tilde{g}(t_1)+A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}(t_2)}{2a_{\neq}(t_1,t_2)}+$$
$$+\frac{1}{2a_{\neq}(t_1,t_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1-\eta}-\frac{1}{2a_{\neq}(t_1,t_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2-\eta}.$$

Устремляя $a\to+\infty$, обозначая $A_{\neq}(t,0)\tilde{g}(t)\equiv G(t)$ и $\lim\limits_{a\to+\infty}a_{\neq}(t_1,t_2)\equiv h(t_1,t_2)$, получим следующее соотношение:

$$\tilde{u}\left(\frac{t_1+t_2}{2},0\right)=\tilde{U}(t_1,t_2)=\frac{A_{\neq}(t_1,0)\tilde{g}(t_1)+A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}(t_2)}{2h(t_1,t_2)}+$$
$$\frac{1}{2h(t_1,t_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1-\eta}-\frac{1}{2h(t_1,t_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2-\eta}. \tag{5}$$

Окончательно, согласно условию (4), имеем

$$2h(t_1,t_2)\tilde{g}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=G(t_1)+G(t_2)+(SG)(t_1)-(SG)(t_2), \tag{6}$$

где

$$(SG)(t)=v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\eta)d\eta}{t-\eta}.$$

3. Имеет место следующий результат.

Теорема. *Если символ $A(\xi_1,\xi_2)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_+^a при достаточно больших a, то предел (5) при $a\to+\infty$ существует, краевая задача (1), (4) разрешима, если имеет место условие (6).*

Библиографический список

1. Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* М.: КомКнига, 2010. 135 с.
2. Vasilyev V. B. On the Dirichlet and Neumann problems in multi-dimensional cone // *Math. Bohem*, 2014. vol. 139, no. 2. pp. 333–340.
3. Vasilyev V. B. On certain elliptic problems for pseudo differential equations in a polyhedral cone // *Adv. Dyn. Syst. Appl*, 2014. vol. 9, no. 2. pp. 227–237.
4. Васильев В. Б. Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2016. Т. 16, № 3. С. 3–14.

5. Эскин Г. И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1973. 232 с.
6. Vasilyev V. B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // *Opusc. Math.*, 2019. vol. 39, no. 1. pp. 109–124. doi: 10.7494/OpMath.2019.39.1.109.

On elliptic problem in a thin cone

V. B. Vasilyev, Sh. H. Kutaiba, O. V. Chernova

Belgorod National Research University,
Institute of Engineering and Digital Technologies,
85, Pobedy street, Belgorod, 308015, Russian Federation.

Abstract

We consider an elliptic pseudo-differential equation in a plane sector with additional integral condition. Using a formula for a general solution we study a limit case in which size of a sector tends to zero. It was shown that given function in the boundary condition can not an arbitrary function, but it should satisfy certain functional singular integral equation.

Keywords: integral condition, pseudo-differential equation, elliptic operator.

Please cite this article in press as:
Vasilyev V. B., Kutaiba Sh. H, Chernova O. V. On elliptic problem in a thin cone, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 24–27 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir B. Vasilyev http://orcid.org/0000-0001-9351-8084
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Differential Equations; e-mail: vbv57@inbox.ru

Shaban H. Kutaiba; Postgraduate Student; Dept. of Differential Equations;
e-mail: 1167542@bsu.edu.ru

Olga V. Chernova http://orcid.org/0000-0002-4175-5448
Senior Lecturer; Dept. of Differential Equations; e-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru

Условия диагонализации главной матрицы системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при построении асимптотического по параметру решения

Л. В. Воропаева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Объектом исследования являются системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром. Эффективное использование неособого срезающего преобразования упрощает диагонализацию главной матрицы системы без изменения её вида с целью построения асимптотического по параметру решения. Найдены условия на степень параметра срезающего преобразования при возможных конструкциях нильпотентной главной матрицы системы и остальных матриц, участвующих в асимптотическом разложении.

Ключевые слова: системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, асимптотическое решение, неособое срезающее преобразование матрицы, диагонализация матрицы, нильпотентная матрица.

Введение. Разложение решений краевых задач для многомерных самосопряжённых дифференциальных операторов по собственным вектор-функциям приводит к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h z'(x) = A(x,\varepsilon)\, z(x)\,, \tag{1}$$

где $z(x)$ — n-мерный вектор, $A(x,\varepsilon) = A^{(0)}(x) + \sum\limits_{i\leqslant 1} A^{(i)}(x)\varepsilon^i$ — квадратная матрица из n-мерного комплексного пространства, $0 < \varepsilon \ll 1$ — величина, обратная номеру собственного вектора дифференциального оператора краевой задачи, $h > 0$.

Построение формальных асимптотических решений по малому параметру ε и доказательство их асимптотической устойчивости связано с расщеплением пространства решений системы (1) на конечное число подпространств, соответствующих кратным собственным значениям главной матрицы системы $A^{(0)}$ [1]. В процессе преобразований может оказаться, что новая $A^{(0)}$ является нильпотентной и имеет вид $J(0) = \big[J_{n_1}(0),\, J_{n_2}(0), \ldots, J_{n_l}(0)\big]$, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant \ldots \geqslant n_l$, где $J_{n_k}(0) = \big(\gamma_{i,j}\big)$ — жорданова клетка порядка $1 \leqslant n_l \leqslant n$,

Образец для цитирования
Воропаева Л. В. Условия диагонализации главной матрицы системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при построении асимптотического по параметру решения / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 28–31.

Сведения об авторе
Людмила Вячеславовна Воропаева http://orcid.org/0000-0003-4783-1664
старший преподаватель; каф. высшей математики и прикладной информатики;
e-mail: ludmilav2@yandex.ru

$\gamma_{i,j} = \{1, j = i+1; 0, j \neq i+1\}$, $\sum\limits_{i=1}^{l} n_i = n$. Тогда основной проблемой является поиск преобразования, позволяющего редуцировать нильпотентную главную матрицу к матрице, в лучшем случае диагонализируемой в некотором базисе.

1. Неособое срезающее преобразование. Пусть $C = \sum\limits_{i=-(n-1)}^{n-1} C^{(i)}$ — матрица, отличная от нулевой,

$$C^{\left(-(n-1)\right)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C^{\left(-(n-2)\right)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{n-1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{n,2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dots, C^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{2,1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{3,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, C^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Необходимо определить условия, при которых с помощью неособого формального срезающего преобразования [3, 4]

$$L(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left[1,\, \varepsilon^{\rho},\, \varepsilon^{2\rho},\, \dots, \varepsilon^{(n-1)\rho}\right] \tag{2}$$

можно привести матрицу $J(0) + \varepsilon^m C$, $m > 0$ к виду $\varepsilon^{\rho}\Lambda + \varepsilon^m \sum\limits_{i=-(n-1)}^{n-1} \varepsilon^{i\rho} C^{(i)}$, где $\Lambda \sim \operatorname{diag}\left[\lambda_1,\, \lambda_2, \dots \lambda_n\right]$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i,\, j = \overline{1, n}$.

В дальнейшем будем полагать

$$C^{(-(n-1))} = C^{\left(-(n-2)\right)} = \dots = C^{\left(-(n-(j-1))\right)} = 0,\ C^{\left(-(n-j)\right)} \neq 0,\ j = \overline{1, n-1}.$$

При $\rho = \dfrac{m}{n-(j-1)}$ результат «срезки» $J(0) + \varepsilon^m C$ очевиден:

$$L^{-1}(\varepsilon)\big(J(0) + \varepsilon^m C\big)L(\varepsilon) = \\ = \varepsilon^{\frac{m}{n-(j-1)}}\left(J(0) + C^{\left(-(n-j)\right)}\right) + \sum_{i=-\left(n-(j+1)\right)}^{n-1} \varepsilon^{m\left(1+\frac{i}{n-(j-1)}\right)} C^{(i)}. \tag{3}$$

2. Условия диагонализации. Диагонализация матрицы $J(0)+C^{\left(-(n-j)\right)}$ в (3) зависит от кратности корней её минимального многочлена [2]. Исходя из этого факта, здесь сформулированы конкретные условия на структуру $J(0)$ и элементы матрицы $C^{\left(-(n-j)\right)}$, а также степень ρ параметра срезающего преобразования (2).

Теорема 1. *Если* $C^{(-(n-1))} = C^{(-(n-2))} = \dots = C^{(-(n-(j-1)))} = 0$, $C^{(-(n-j))} \neq 0$, $j = \overline{1, n-1}$, $\rho = \dfrac{m}{n-(j-1)}$, $\det\left(J(0) + C^{(n-j)}\right) = 0$, *но*

сумма главных миноров порядка $n-1$, $M_{n-1}\left(J(0)+C^{(n-j)}\right)\neq 0$, *то существует базис, в котором* $J(0)+C^{(-(n-j))}$ *приводится к диагональному виду* $\operatorname{diag}[0,\,\zeta_2,\,\zeta_3,\ldots\zeta_n]$, *где значение* 0 *и* $\zeta_i\neq\zeta_l\neq 0$ — *собственные значения матрицы* J, $l=\overline{2,n}$.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *и для* $n\geqslant 2k+1, k=2,3,\ldots$, *если выполнено одно из условий:*

(*a*) $J(0)=[J_{n-k}(0),\underbrace{J_1,(0),\ldots J_1(0)}_{k}]$, $M_{n-1}\left(J(0)+C^{(-(n-j))}\right)=$
$=c_{n-k,1}\neq 0$;

(*b*) $J(0)=[J_{n-(k-1)}(0),\underbrace{J_1(0),\ldots J_1(0)}_{k-1}]$, $M_{n-1}\left(J(0)+C^{(-(n-j))}\right)=$
$=c_{n-(k-1),2}+c_{n-k,1}\neq 0$;

то $J(0)+C^{(-(n-j))}\sim\operatorname{diag}[0,\,\zeta_2,\,\zeta_3,\ldots\zeta_n]$.

Теорема 3. *Если выполнено одно из условий:*

(*a*) $J(0)=J_{2k}(0)$, $C^{(-(n-1))}=C^{(-(n-2))}=\cdots=C^{(-2)}=0$, $C^{(-1)}\neq 0$,
$\rho=\dfrac{m}{2}$, $\det\left(J_{2k}(0)+C^{(-1)}\right)=\prod\limits_{i=1}^{k}(-1)^i c_{2i,2i-1}\neq 0$, $k=1,2,\ldots$;

(*b*) $J(0)=J_{2k}(0)$, $C^{(-(n-1))}=C^{(-(k-2))}=\cdots=C^{(k-2)}=0$, $C^{(k-1)}\neq 0$,
$\rho=\dfrac{m}{k}$, $\det\left(J_{2k}(0)+C^{(-(n-1))}\right)=c_{k,1}c_{2k,k+1}\neq 0$, $k=2,3,\ldots$;

(*c*) $J(0)=J_n(0)$, $C^{(-(n-1))}\neq 0$, $\rho=\dfrac{m}{n}$,
$\det\left(J_n(0)+C^{(-(n-1))}\right)=c_{n-1,n}\neq 0$, $n=2,3,\ldots$;

то $J(0)+C^{(-(n-j))}\sim\operatorname{diag}[\zeta_1,\,\zeta_2,\ldots\zeta_n]$, $\zeta_i\neq\zeta_l$ — *собственные значения матрицы* J, $l=\overline{1,n}$.

Заключение. Применение неособого срезающего преобразования к системе (1) с учётом условий, сформулированных в п.2, даёт возможность эффективной диагонализации главной матрицы системы (1) для построения ее асиптитического решения.

Библиографический список

1. Шкиль Н. И. , Старун И. И. , Яковец В. П. *Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями.* К.: Выща шк., 1991. 207 с.
2. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1968. 576 с.
3. Turrittin H. L. Asymptotic expansion of solutions of systems of ordinary linear differential equations containing a parameter // *Matematika*, 1957. vol. 1, no. 2. pp. 29–60; *Contributions to the theory of nonlinear oscillations, v. II, Annals of Mathematics Studies*, 1952. vol. 29. pp. 81–116.
4. Вазов В. *Ассимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1968. 464 с.

Diagonalization conditions of the main matrix of the system of ordinary linear differential equations in the construction of asymptotic parameter solutions

L. V. Voropaeva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The object of research is the system of ordinary linear differential equations of the first order with the parameter. The effective use of a non-singular shear transformation simplifies the diagonalization of the main matrix of the system without changing its form, in order to construct an asymptotic solution for the parameter. The conditions for the degree of the parameter of the shear transformation for possible constructions of the nilpotent main matrix of the system and other matrices involved in the asymptotic expansion are found.

Keywords: systems of ordinary linear differential equations, asymptotic solution, nonsingular shear matrix transformation, matrix diagonalization, nilpotent matrix.

Please cite this article in press as:
V o r o p a e v a L. V. Diagonalization conditions of the main matrix of the system of ordinary linear differential equations in the construction of asymptotic parameter solutions, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 28–31 (In Russian).

Author's Details:

Lyudmila V. Voropaeva http://orcid.org/0000-0003-4783-1664
Senior Lecturer; Dept. of Higher Mathematics and Applied Informatics;
e-mail: ludmilav2@yandex.ru

Индефинитная задача Штурма—Лиувилля

А. А. Гималтдинова

Уфимский государственный нефтяной технический университет,
Россия, 450062, Уфа, Космонавтов, 1.

Аннотация

Изучена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на конечном отрезке со знакопеременным коэффициентом. На концах отрезка заданы краевые условия второго рода, во внутренней точке заданы условия сопряжения по функции и первой производной. Найдены собственные значения и соответствующая система корневых функций. Получено утверждение о полноте соответствующей биортогональной системы функций.

Ключевые слова: индефинитная задача, собственные значения, собственные и присоединенные функции, полнота.

Введение. Исследуем спектральную задачу для уравнения

$$X'' + d \cdot \operatorname{sgn} x \cdot X = 0, \quad x \in (-l, 0) \cup (0, h), \quad l, h > 0, \quad d = \mu^2 \in C, \tag{1}$$

с условиями сопряжения

$$X(0-0) = X(0+0), \quad X'(0-0) = X'(0+0)$$

и граничными условиями второго рода

$$X'(-l) = X'(h) = 0. \tag{2}$$

Близкие задачи рассматривались в работах [1, 2].

1. Нахождение собственных значений и корневых функций. Собственными функциями задачи (1), (2) являются корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(\mu h) = \operatorname{th}(\mu l). \tag{3}$$

Лемма. *Уравнение (3) имеет счетное множество корней, состоящее из $\mu_0 = 0$, попарно противоположных действительных чисел $\pm\mu_k^{(1)}$ и попарно противоположных чисто мнимых чисел $\pm i\mu_k^{(2)}$, где*

$$\mu_k^{(1)} = \frac{1}{h}\left(\frac{\pi}{4} + \pi k - \varepsilon_k\right), \quad \mu_k^{(2)} = \frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{4} + \pi k - \varepsilon_k\right), \quad \varepsilon_k = O(e^{-2l\pi k/h}).$$

Образец для цитирования
Гималтдинова А. А. Индефинитная задача Штурма—Лиувилля / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 32–34.

Сведения об авторе
Альфира Авкалевна Гималтдинова http://orcid.org/0000-0001-7535-213X
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. математики;
e-mail: aa-gimaltdinova@mail.ru

Соответствующие собственные функции имеют вид: $X_0(x) = 1$,

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos[\mu_k^{(1)}(x-h)]}{\cos(\mu_k^{(1)}h)}, \ 0 < x < h, \\ \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k^{(1)}(x+l)]}{\operatorname{ch}(\mu_k^{(1)}l)}, \ -l < x < 0, \end{cases}$$

$$X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}[\mu_k^{(2)}(x-h)]}{\operatorname{ch}(\mu_k^{(2)}h)}, \ 0 < x < h, \\ \dfrac{\cos[\mu_k^{(2)}(x+l)]}{\cos(\mu_k^{(2)}l)}, \ -l < x < 0. \end{cases}$$

В случае $l = h$ к системе собственных функций добавляется единственная присоединенная функция, соответствующая значению $\mu_0 = 0$:

$$X_{01}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - lx, \ 0 < x < l, \\ -\dfrac{x^2}{2} - lx, \ -l < x < 0, \end{cases}$$

а в случае $l \neq h$ задача не имеет присоединенных функций.

2. Сопряженная задача. Так как система $\left\{X_0(x), X_{01}(x), X_k^{(1)}(x), X_k^{(2)}(x)\right\}$ не ортогональна в $L_2[-l,l]$ (соответственно система $\left\{X_0(x), X_k^{(1)}(x), X_k^{(2)}(x)\right\}$ не ортогональна в $L_2[-l,h]$), то рассмотрим задачу, сопряженную к (1), (2):

$$Z'' + d \cdot \operatorname{sgn} x \cdot Z = 0,$$

$$Z(0-0) = -Z(0+0), \ \ Z'(0-0) = -Z'(0+0), \ Z'(-l) = Z'(h) = 0.$$

Получим

$$Z_0(x) = \operatorname{sgn} x, \ \ Z_k^{(1)}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot X_k^{(1)}(x),$$

$$Z_k^{(2)}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot X_k^{(2)}(x), \ \ Z_{01}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot Z_{01}(x).$$

Системы $\{X_0,\, X_{01},\, X_k^{(1)},\, X_k^{(2)}\}$ и $\{Z_{01},\, Z_0,\, Z_k^{(1)},\, Z_k^{(2)}\}$ являются биортогонально сопряженными (или, по-другому: система $\{X_0,\, X_{01},\, X_k^{(1)},\, X_k^{(2)}\}$ ортогональна с весом $\operatorname{sgn} x$).

Теорема. *Каждая из систем* $\{X_0,\, X_{01},\, X_k^{(1)},\, X_k^{(2)}\}$ *и* $\{Z_{01},\, Z_0,\, Z_k^{(1)},\, Z_k^{(2)}\}$ *полна в пространстве* $L_2[-l,l]$ *(или в* $L_2[-l,h]$ *соответственно без присоединенных функций).*

Доказательство аналогично [3].

Благодарность. Работа поддержана РФФИ-РБ (проект 17-41-020516) .

Библиографический список

1. Beals R. Indefinite Sturm-Liouville problems and Half-Range Completness // *Journal of Differential Equations*, 1985. Т. 56, № 3. С. 391–407. doi: 10.1016/0022-0396(85)90085-3.
2. Пятков С.Г. Некоторые свойства собственных и присоединенных функций незнакоопределенных задач Штурма – Лиувилля / *Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ.*. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2005. С. 241–252.
3. Гималтдинова А.А., Курман К.В. О полноте одной пары биортогонально сопряженных систем функций // *Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 7–18. doi: 10.14498/vsgtu1385.

The indefinite Sturm-Liouville problem

A. A. Gimaltdinova

Ufa State Petroleum Technological University,
1, Kosmonavtov Str., Ufa, 450062, Russian Federation.

Abstract

The spectral problem for an ordinary differential equation of the second order on a finite interval with an alternating coefficient is studied. At the ends of the segment, boundary conditions of the second kind are specified; at the interior point, the conjugation conditions are given for the function and the first derivative. The eigenvalues and the corresponding system of root functions are found. We obtain a statement about the completeness of the corresponding biorthogonal system of functions.

Keywords: indefinite problem, eigenvalues, eigenfunctions and associated functions, completeness.

Please cite this article in press as:
Gimaltdinova A. A. The indefinite Sturm-Liouville problem, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 32–34 (In Russian).

Author's Details:

Alfira A. Gimaltdinova http://orcid.org/0000-0001-7535-213X
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematics;
e-mail: aa-gimaltdinova@mail.ru

Об одной нелокальной задаче для уравнения IV порядка

А. В. Дюжева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для уравнения соболевского типа. Постановка задачи содержит нелокальное граничное условие I рода. Доказана возможность эквивалентного перехода от условия I рода к условию II рода. Доказано существование единственного обобщенного решения поставленной задачи. Для доказательства используются свойства пространства Соболева, полученные априорные оценки и метод Галеркина.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, нелокальные граничные условия, интегральные условия I рода, псевдогиперболическое уравнение, уравнение Рэлея–Бишопа.

Введение. В статье рассматривается нелокальная задача для уравнения четвертого порядка. В уравнении присутствует как доминирующая смешанная производная, так и производная четвертого порядка по пространственной переменной. Уравнения соболевского типа с производной по времени второго порядка в литературе принято относить к псевдогиперболическим уравнениям [1]. В механике рассмотренное уравнение принято называть уравнением Рэлея—Бишопа. Постановка задачи содержит нелокальные граничные условия. Список литературы по этому вопросу приведен в [2]. Интегральные условия возникают, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений, и условия описываются через поведение решения во внутренних точках области. Получены условия на коэффициенты уравнения и входные данные, гарантирующие существование единственного решения поставленной задачи

1. Постановка задачи. В ограниченной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$u_{tt} + (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{xtt})_x + (d(x)u_{xx})_{xx} + c(x)u = f(x, t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \tag{2}$$

Образец для цитирования
Дюжева А. В. Об одной нелокальной задаче для уравнения IV порядка / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 35–40.

Сведения об авторе
Александра Владимировна Дюжева ✉ кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики; e-mail: aduzheva@rambler.ru

и граничным условиям

$$u_{xx}(0,t) = \int_0^l K_1 u dx, \quad u_{xx}(l,t) = \int_0^l K_2 u dx, \tag{3}$$

$$d(l)u_{xxx}(l,t) - b(l)u_{xtt}(l,t) = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^l u dx = 0. \tag{5}$$

Условие (5) является интегральным условием первого рода. Метод решения задач с такими условиями предполагает переход от условий первого рода к условиям второго рода. Для этого воспользуемся приемом из [2]. Получим

$$d(0)u_{xxx}(0,t) - b(0)u_{xtt}(0,t) + a(0)u_x(0,t) = \\ = a(l)u_x(l,t) + \int_0^l \big[d'(l)K_2 - d'(0)K_1 - c\big]u + f dx. \tag{6}$$

Следовательно, решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5), удовлетворяет и условию (6). Покажем, что из условия (6) следует выполнение условия (5). Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), (3) и (6). Проинтегрируем (1) по $(0,l)$ и, учитывая (6), получим

$$\int_0^l u_{tt}(x,t)dx = 0.$$

Равенство является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции

$$\int_0^l u(x,t)dx = 0.$$

Условия согласования получаем из начальных условий

$$\int_0^l u(x,0)dx = 0, \quad \int_0^l u_t(x,0)dx = 0.$$

В силу единственности решения задачи Коши относительно функции $\int_0^l u dx$, убеждаемся в выполнении условия (5).

Таким образом, условия (5) и (6) эквивалентны, поэтому вместо задачи (1)–(5) будем рассматривать задачу (1)–(3), (6).

Обозначим

$$W(Q_T) = \big\{u(x,t) : u \in W_2^1(Q_T), u_x \in W_2^1(Q_T)\big\},$$
$$\hat{W}(Q_T) = \big\{v(x,t) : v \in W(Q_T), v(x,T) = 0$$

Следуя известной процедуре [3], получим равенство:

$$\int_0^T \int_0^l \big(-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{xt} v_{xt} + d u_{xx} v_{xx} + c u v\big) dx dt -$$

$$-\int_0^T a(l)u_x(l,t)[v(l,t)-v(0,t)]dt+\int_0^T d'(l)\int_0^l K_2 udxv(l,t)dt+$$
$$+\int_0^T\int_0^l \big[d'(l)K_2-2d'(0)K_1-c\big]udxv(0,t)dt-$$
$$-\int_0^T d(l)\int_0^l K_2 udxv_x(l,t)dt+\int_0^T d(0)\int_0^l K_1 udxv_x(0,t)dt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l fvdxdt+\int_0^T\int_0^l fv(0,t)dxdt. \quad (7)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(3), (6) будем называть функцию $u(x,t)\in W\big(Q_T\big)$, удовлетворяющую начальным данным (2) и тождеству (7) для любой функции $v(x,t)\in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

2. Разрешимость задачи.

Теорема. *Пусть выполняются условия*

$H1.\ f\in L_2\big(Q_T\big),\quad a,b,K_i\in C^1[0,l],\quad c\in C^1\big(\overline{Q}_T\big),\quad d\in C^2[0,l];$

$H2.\ a(x)\geqslant a_0>\dfrac{2}{l}d(l),\ b(x)\geqslant b_0>0,\ d(x)\geqslant d_0>2ld(l),\ \dfrac{1}{k_2 l}\geqslant d(l)>0.$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3), (6).

Доказательство. Заметим, что в силу условий теоремы найдутся числа c_0 и k_i такие, что

$$\max_{[0,l]}|K_1(x)|\leqslant k_1,\quad \max_{[0,l]}|K_2(x)|\leqslant k_2,\quad \max_{\overline{Q}_T}|c(x,t)|\leqslant c_0.$$

Единственность. Предположим, что существует два различных обобщенных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1)-(3), (6). Тогда $u=u_1-u_2$ — решение соответствующей однородной задачи.

Положим в тождестве, соответствующему однородной задачи (1)–(3), (6),

$$v(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_\tau^t u(x,t)d\eta, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

Выбранная таким образом функция принадлежит пространству $\hat{W}(Q_T)$. Заметим, что $v_t(x,t)=u(x,t)$.

Используя неравенства Коши, Коши—Буняковского, неравенства из [4], имеем

$$v^2(z_i,t)\leqslant 2l\int_0^l v_x^2dx+\frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,\quad \text{и}\quad v^2(x,t)\leqslant\tau\int_0^\tau v_t^2(x,t)dt.$$

Введем функцию

$$w(x,t)=\int_0^t u_x(x,\eta)d\eta,$$

которая позволяет получить следующее равенство: $v_x(x,t) = w(x,\tau) - w(x,t)$, $v_x(x,0) = w(x,\tau)$. Так как функция

$$w_x = \int_0^t u_{xx}(x,\eta)d\eta,$$

то $v_{xx}(x,t) = w_x(x,\tau) - w_x(x,t)$, $v_x(x,0) = w(x,\tau)$. Тогда получим

$$\int_0^l \left[v_t^2 + aw^2 + bv_{xt}^2 + dw_x^2 + v\right]dx \leqslant C_1 \int_0^\tau \int_0^l \left[v_{xt}^2 + v^2 + v_t^2\right]dxdt +$$
$$+ 2C_1 \int_0^\tau \int_0^l \left[w^2 + w_x^2\right]dxdt + C_1(2\tau+1)\tau \int_0^l \left[w^2 + w_x^2\right]dx.$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы

$$a_0 - C_1 - 2C_1\tau \geqslant \frac{a_0}{2} \quad \text{и} \quad d_0 - C_1 - 2C_1\tau \geqslant \frac{d_0}{2}.$$

Пусть $\nu = \min\left\{\frac{a_0}{2}, \frac{d_0}{2}\right\}$. Тогда для $\tau \in \left[0, \frac{\nu}{4C_1}\right]$ будет справедливо неравенство

$$\int_0^l \left[v_t^2 + w^2 + v_{xt}^2 + w_x^2 + v^2\right]dx \leqslant K \int_0^\tau \int_0^l \left[v_t^2 + w^2 + v_{xt}^2 + w_x^2 + v^2\right]dxdt,$$

где $m_0 = \min\left\{1, \nu, b_0\right\}$, $K = \frac{C_1}{m_0}$. Применение к последнему неравенству леммы Гронуолла приводит к равенству $u(x,t) = 0$ для $\forall t \in \left[0, \frac{\nu}{4C_1}\right]$. Повторяя рассуждения для $t \in \left[\frac{\nu}{4C_1}, \frac{\nu}{2C_1}\right]$, убедимся, что и на этом промежутке $u(x,t) = 0$. Продолжив этот процесс, в конечное число шагов получим, что $u(x,t) = 0$ на всем промежутке $[0,T]$. Итак, при условиях теоремы существует не более одного решения поставленной задачи.

Существование. Будем искать приближенное решение (1)–(3), (6) в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m d_k(t)w_k(x),$$

где $\{w_k(x)\}_1^\infty$ — линейно независимая и полная в $W_2^2(0,l)$ система функций, в которой $w_k(x) \in C^2[0,l]$. Дополнительно потребуем, чтобы $(w_k, w_l)_{L_2} = \delta_{kl}$. Это условие не ограничивает общности, но упрощает выкладки. Получим

$$\sum_{k=1}^m \left[A_{jk}d_j'' + B_{jk}d_k(t)\right] = f_j, \tag{8}$$

где $A_{kj}(t)$, $B_{kj}(t)$, $f_j(t)$ выписываются, как обычно. Добавив начальные условия

$$d_j(0) = 0; \quad d_j'(0) = 0, \tag{9}$$

получаем задачу Коши для системы (8). Использовав выражение для коэффициентов A_{kj} и изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$q = \int_0^l \left[|\xi|^2 + b(x,t)|\nabla\xi|^2\right]dx \geqslant 0,$$

где $\xi = \sum_{k=1}^{m} w_k \xi_k$. Таким образом, $q > 0$. Следовательно, система (8) разрешима относительно старших производных. Так как из условий теоремы следует ограниченность ее коэффициентов и принадлежность правой части пространству $L_2(Q)$, то задача Коши (8), (9) разрешима и $d''(t) \in L_2(Q_T)$.

Итак, в силу разрешимости задачи (8), (9) последовательность приближенных решений задачи (1)–(3), (6) построена.

Априорные оценки Умножим (8) на $d'_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем полученное равенство по t от 0 до τ. Интегрируя по частям, учитывая начальные условия и условия теоремы и применяя те же неравенства, что и при доказательстве единственности, получим

$$\int_0^l \left[(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2 + (u_{xx}^m)^2 + (u^m)^2\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \int_0^\tau \int_0^l \left[\left(u_x^m\right)^2 + \left(u_{xt}^m\right)^2 dxdt + \left(u_{xx}^m\right)^2 + \left(u^m\right)^2 + \left(u_t^m\right)^2\right] dxdt +$$
$$+ M_2 \int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt,$$

где M_1, M_2 зависят от a_0, $d(l)$, b_0, d_0, k_2, 1, $_0$. В силу условий теоремы функция $\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt$ ограничена. Пусть она ограничена каким-то числом k. Тогда после интегрирования по τ от 0 до T, из предыдущей оценки следует

$$\left|\left|u^m(x,t)\right|\right|^2_{W(Q_t)} \leqslant C. \tag{10}$$

Так как пространство $W(Q_T)$ гильбертово, то оценка (10) позволяет утверждать, что из построенной последовательности приближенных решений $\left\{u^m(x,t)\right\}$ можно выделить слабо сходящуюся в норме $W\left(Q_T\right)$ подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение.

На заключительном этапе по обычной схеме показывается, что предел последовательности приближенных решений удовлетворяет тождеству (7). □

Заключение. Доказано существование единственного обобщенного решения поставленной задачи.

Библиографический список

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск.: Науч. кн., 1998. 436 с.
2. Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача с нелокальными динамическими условиями для уравнения колебаний толстого стержня // *Вестн. Сам. ун-та. Естественнонаучная серия*, 2017. №4. С. 7–18. doi: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18.
3. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.
4. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. Т. 10. С. 32–44.

On a non-local problem for IV order equations

A. V. Dyujeva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The article deals with a non-local problem with an integral condition for a Sobolev type equation. The problem statement contains a non-local boundary condition of the first kind. The possibility of an equivalent transition from a condition of the first kind to a condition of the second kind is proved. The existence of a unique generalized solution of the problem is proved. For the proof, we use the properties of the Sobolev space, apriori estimates, which were obtained , and the Galerkin method.

Keywords: Sobolev type equations, initial-boundary value problem, non-local conditions, pseudo-hyperbolic equation, Rayleigh–Bishop equations, fourth-order equation.

Please cite this article in press as:
D y u j e v a A. V. On a non-local problem for IV order equations, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 35–40 (In Russian).

Author's Details:

Alexandra V. Dyujeva ✉ Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: aduzheva@rambler.ru

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с характеристическим вырождением

И. П. Егорова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Аннотация

В работе рассмотрена краевая задача для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области с характеристическим вырождением. Доказаны существование и единственность решения задачи. Решения построены в виде суммы рядов и установлены достаточные условия сходимости рядов в соответствующих классах решений заданного уравнения.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, условия периодичности, спектральный метод, ряд, единственность, существование.

Уравнение смешанного типа второго рода

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)|y|^s u_{yy} = 0,$$

где $0 < s < 1$ рассмотрим в прямоугольной области

$$D = \{(x, y) |\, 0 < x < l,\ -\alpha < y < \beta\}.$$

Задача. *При $0 < s < 1$ требуется найти в области D функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

$$u(x, y) \in C^1\big(\overline{D}\big) \cap C^2\big(D_+ \cup D_-\big); \tag{1}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{2}$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{3}$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad u(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, для которых $f(0) = f(l)$, $g(0) = g(l)$, $f'(0) = f'(l)$, $g'(0) = g'(l)$.

Ранее задача Дирихле была рассмотрена в работах [1–3] для уравнений смешанного типа с вырождением первого и второго рода. В работе К. Б. Сабитова и О. Г. Сидоренко [4] была впервые исследована краевая задача с условиями (3) для уравнений смешанного типа первого рода в прямоугольной

Образец для цитирования
Егорова И. П. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с характеристическим вырождением / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 41–43.

Сведения об авторе
Ирина Петровна Егорова кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики; e-mail: ira.egorova81@yandex.ru

области. Методом спектральных разложений установлен критерий единственности решения. При этом решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи.

Вывод. Следуя [1,4], в данной работе доказан критерий единственности, а искомая функция формально построена в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи.

Решение задачи определено в виде суммы ряда Фурье:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{l}}u_0(y) + \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\cos\lambda_k x + \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(y)\sin\lambda_k x,$$

где

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{f_k\sqrt{\alpha y}\delta_k(\alpha,y) + g_k\sqrt{\beta y}E_k(y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0, \\ \dfrac{f_k\sqrt{-\alpha y}F_k(\alpha,-y) + g_k\sqrt{-\beta y}\delta_k(-y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y<0, \end{cases}$$

$$v_k(y) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{\alpha y}\,\delta_k(\alpha,y) + \widetilde{g}_k\sqrt{\beta y}E_k(y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0, \\ \dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{-\alpha y}F_k(\alpha,-y) + \widetilde{g}_k\sqrt{-\beta y}\delta_k(-y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y<0, \end{cases}$$

$$u_0(y) = \frac{f_0-g_0}{\alpha+\beta}y + \frac{\alpha f_0+\beta g_0}{\alpha+\beta}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$

$$\delta_k(\alpha,y) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q),$$

$$E_k(y,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) - I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q),$$

$$F_k(\alpha,-y) = \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) - \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q),$$

$$\delta_k(-y,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q).$$

Доказан критерий единственности.

Теорема. *Если решение $u(x,y)$ задачи (1)–(4) существует, то оно единственно тогда и только тогда, когда $\delta_k(\alpha,\beta) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказана сходимость рядов в указанных классах решений данного уравнения [5].

Библиографический список

1. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // *ДАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
2. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле второго рода в прямоугольной области // *Известия Вузов. Математика*, 2007. № 4. С. 45–53.
3. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2009. № 11. С. 43–52.

4. Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г. Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // *Дифференциальные уравнения*, 2010. Т. 46, № 1. С. 105–113.
5. Егорова И. П. Задача с условиями периодичности для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением // *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*, 2009. Т. 74, № 8. С. 15–27.

Dirichlet problem for a mixed type equation of the second kind with characteristic degeneration

I. P. Egorova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Abstract

The boundary value problem for a mixed type equation of the second kind in a rectangular region with characteristic degeneration is considered. The existence and uniqueness of the solution of the problem are proved. The solutions are constructed as a sum of series and sufficient conditions for the convergence of series in the corresponding classes of solutions of the given equation are established.

Keywords: mixed type equations, periodicity conditions, spectral method, series, uniqueness, existence.

Please cite this article in press as:
Egorova I. P. Dirichlet problem for a mixed type equation of the second kind with characteristic degeneration, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 41–43 (In Russian).

Author's Details:
Irina P. Egorova Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dep. of Higher Mathematics; e-mail: ira.egorova81@yandex.ru

Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка

В. А. Ким[1,2]***, Р. И. Паровик***[2,3]

[1] Камчатский государственный технический университет,
Россия, 683003, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская,35
[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга,
Россия, 683032, Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4,
[3] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Россия, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная,7.

Аннотация

В работе проведено исследование математической модели дробного осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка. Рассматривались два различных определения производной дробного переменного порядка. Далее модель решалась с использованием конечно-разностных схем, а с помощью правила Рунге были получены оценки их вычислительной точности. Построены осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что оба определения производной переменного дробного порядка дают практически одинаковые результаты.

Ключевые слова: дробный осциллятор Дуффинга, дробная производная Римана—Лиувилля, фазовые траектории, правило Рунге.

Введение. Математическое моделирование дробных осцилляторов имеет важное практическое значение в различных областях знаний [1]. В монографии [2] были исследованы некоторые нелинейные дробные осцилляторы с производными Римана—Лиувилля дробных постоянных порядков. С помощью аппроксимации дробных производных разностными аналогами Грюнвальда—Летникова строиласть явная конечно-разностная схемя для расчета осциллограмм и фазовых траекторий.

В настоящей работе рассматривается дробный осциллятор Дуффинга с производной переменного дробного порядка в диссипативном члене, который несколько отличается от рассмотренного в работе [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу Коши для смещения $x(t) \in C^2(0,T)$ [3]:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha\partial_{0t}^{q(t)}x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta\cos(\omega t), x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \qquad (1)$$

Образец для цитирования
Ким В. А., Паровик Р. И. Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 44–46.

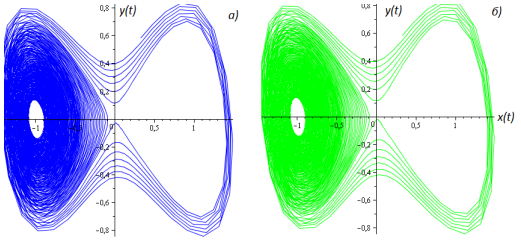
Сведения об авторах

Валентин Александрович Ким http://orcid.org/0000-0001-8895-6821
аспирант; лаборант; лаб. моделирования физических процессов;
e-mail: valentinekim@mail.ru

Роман Иванович Паровик http://orcid.org/0000-0002-1576-1860
кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования физических процессов; e-mail: parovik@ikir.ru

здесь $\partial_{0t}^{q(t)} x(\tau) = \dfrac{d}{dt} \int\limits_0^t \dfrac{x(\tau)d\tau}{\Gamma(1-q(\tau))(t-\tau)^{q(\tau)}}$ — производная переменного дробного порядка $0 < q(t) < 1$, $a > 0$ — коэффициент трения, δ и ω — амплитуда и частота внешнего периодического воздействия, x_0 и y_0 — заданные константы,которые определяют начальное состояние колебательной системы.

2. Результаты моделирования. Далее в работе были проведены аналогичные исследования, что и в статье авторов [3], построена и исследована явная конечно-разностная схема. Согласно полученной схеме были рассчитаны и исследованы осциллограммы и фазовые траектории (см. рисунок и таблицу).



Фазовые трактории, полученные: а — согласно работе [3], б — согласно численному решению задачи Коши (1)

Погрешность ε и вычислительная точность α конечно-разностных схем. Порядок дробной производной изменяется по закону $q(t) = 0.05\sin^2(\omega t)$

N	ε [3]	α [3]	ε (1)	α (1)
10	0.0049613245	1.771213865	0.0049613352	1.771213145
20	0.0025097923	1.623136606	0.0025097880	1.623137071
40	0.0012615702	1.523358642	0.0012615218	1.523367397
80	0.0006323386	1.451395719	0.0006322009	1.451438631
160	0.0003163909	1.354656124	0.0003160913	1.355224490
320	0.0000784740	1.255693035	0.0001573969	1.23842142
640	0.0000383609	1.1749645385	0.0000774286	1.152456726
1280	0.0000177434	1.098639585	0.0000365405	1.068092150
2560	0.0000069468	1.024556725	0.0000149002	1.011064154
5120	0.0000034734	1.006586925	0.0000053825	1.009746554

Из таблицы видно, что для обеих схем при увеличении количества расчетных узлов N в два раза погрешность уменьшается в два раза, а вычислительная точность стремиться к единице. Это подтверждает тот факт, что порядок аппроксимации для обеих схем равен единице. На рисунке приведены фазовые траектории, построенные по обеим схемам. Видно, что траектории похожи.

3. Заключение. В работе найдено численное решение задачи (1) и построены фазовые траектории по аналогии с работой [3]. С помощью правила Рунге построена таблица погрешностей и вычислительной точности для схемы из работы [3] и новой схемы для решения задаци Коши (1). Обе схемы дают практически одинаковый результат. Дальнейшее развитие работы может заключатся в исследовании хаотических и регулярных режимов дробного осциллятора Дуффинга по аналогии с работой [4].

Благодарность. Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации МК-1152.2018.1.

Библиографический список

1. Паровик Р. И. *Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов.* Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 135 с.
2. Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation.* Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 pp.
3. Ким В. А. Осциллятор Дуффинга с внешним гармоническим воздействием и производной переменного дробного порядка Римана—Лиувилля, характеризующая вязкое трение // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 13, №2(13). С. 50–54. doi: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-50-54.
4. Ким В. А., Паровик Р. И. Расчет максимальных показателей Ляпунова для колебательной системы Дуффинга со степенной памятью // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. №3(23). С. 98–105. doi: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-98-105.

Mathematical modeling of the Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order

***V. A. Kim*[1,2], *R. I. Parovik*[2,3]**

[1] Kamchatka State Technical University,
35, Klyuchevskaya st., Petropavlovsk-Kamchatskiy, 683003, Russian Federation,
[2] Vitus Bering Kamchatka State Univrsity,
4, Pogranichnaya st., Petropavlovsk-Kamchatskiy, 683032, Russian Federation,
[3] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
7, Mirnaya st., v. Paratunka, Kamchatkiy kray, 684034, Russian Federation.

Abstract

In this paper, a mathematical model of a fractional Duffing oscillator with a derivative of a variable fractional order has been studied. Two different definitions of the derivative of a fractional variable order were considered. Further, the model was solved using finite-difference schemes, and using the Runge rule, estimates of their computational accuracy were obtained. Oscillograms and phase trajectories are constructed. It is shown that both definitions of the derivative of a variable fractional order give almost identical results.

Keywords: fractional Duffing oscillator, fractional Riemann-Liouville derivative, phase trajectories, Runge rule.

Please cite this article in press as:
Kim V. A., Parovik R. I. Mathematical modeling of the Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 44–46 (In Russian).

Authors' Details:

Valentine A. Kim http://orcid.org/0000-0001-8895-682
Postgraduate Student; Laboratorian; Lab. of Modeling of Physical Processes;
e-mail: valentinekim@mail.ru

Roman I. Parovik http://orcid.org/0000-0002-1576-1860
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Lab. of Modeling of Physical Processes; e-mail: parovik@ikir.ru

О решении аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного типа методом функции Грина

Р. А. Киржинов

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Аннотация

Для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка рассматривается аналог задачи А. А. Дезина с неоднородными нелокальными краевыми условиями. В работе доказаны единственность и существование решения исследуемой задачи. Решение выписано в явном виде методом функции Грина.

Ключевые слова: аналог задачи Дезина, уравнение параболо-гиперболического типа, нелокальные краевые условия.

Введение. В своей монографии А. М. Нахушев [1, с. 18] приводит формулировки нелокальных краевых условий по терминологии А. А. Дезина [2].

Упомянутая задача оставалась долгие годы не исследованной до появления работы З. А. Нахушевой [3], посвящённой задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе

$$(\operatorname{sgn} y)u_{yy}(x,y) + u_{xx}(x,y) = f(x,y)\,H(y),$$

где $H(y)$ — функция Хевисайда.

Дальнейшие исследования задачи Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе продолжились в работах К. Б. Сабитова, В. А. Гущиной (Новиковой) [4–6].

Аналог задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u(x,\,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^{1+H(-y)} u(x,\,y)}{\partial y^{1+H(-y)}} = f(x,\,y)\,H(y)$$

был сформулирован в монографии З. А. Нахушевой [7, с. 174]. Доказана однозначная разрешимость аналога задачи А. А. Дезина в области

$$\{(x,\,y)\colon 0 < x < r,\ -r < y < \beta\}.$$

Там же исследован вопрос о спектре однородной задачи.

Образец для цитирования
Киржинов Р. А. О решении аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного типа методом функции Грина / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 47–49.

Сведения об авторе
Ромазан Анатольевич Киржинов http://orcid.org/0000-0001-6645-7175
магистр; стажёр; отд. уравнений смешанного типа; e-mail: kirzhinov.r@mail.ru

Постановка задачи. Пусть $\Omega = \{(x, y)\colon 0 < x < r,\ -\alpha < y < \beta\}$ — область евклидовой плоскости точек (x, y); $\Omega^+ = \Omega \cap \{y\colon y > 0\}$; $\Omega^- = \Omega \cap \{y\colon y < 0\}$; $I = \Omega \cap \{y\colon y = 0\}$; r, $\alpha = n_0 r$, β — вещественные положительные числа; n_0 — фиксированное натуральное число. Обозначим через $C_x^k(\Omega)$ пространство функций $f(x, y)$ таких, что $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, y) \in C(\Omega)$.

Задача 1. *В области Ω найти решение $u(x, y)$ уравнения*

$$f(x, y) = \begin{cases} u_{xx}(x, y) - u_y(x, y), & y > 0, \\ u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y), & y < 0, \end{cases}$$

из класса $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_y^2(\Omega^-)$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) - u(r, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) - u_x(r, y) = \psi(y), \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$

$$u_y(x, -\alpha) = \lambda\, u(x, 0), \qquad 0 \leqslant x \leqslant r,$$

где $f(x, y) \in C\left(\overline{\Omega}^+\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}^-\right) \cap C_x^2(\Omega^-)$, $\varphi(y), \psi(y) \in C^3[-\alpha, 0] \cap C^1[0, \beta]$ — заданные вещественные функции.

Заключение. В данной работе методом функции Грина выписано решение $u(x, y)$ задачи 21 и доказана теорема однозначной разрешимости при $\lambda \neq -\left(\frac{2\pi k}{r}\right)^2 \forall k \in \mathbb{Z}$. Полученные результаты обобщают ранее полученные в [8, 9] результаты исследований.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.
2. Дезин А. А. Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдогиперболического операторов // *Докл. АН СССР*, 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
3. Нахушева З. А. Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // *Дифференц. уравнения*, 2009. Т. 45, № 8. С. 1199–1203.
4. Сабитов К. Б., Новикова В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // *Изв. вузов. Матем.*, 2016. № 6. С. 61–72.
5. Сабитов К. Б., Гущина (Новикова) В. А. Задача А. А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева—Бицадзе // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 3. С. 37–50.
6. Гущина В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения смешанного эллиптико—гиперболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 22–32.
7. Нахушева З. А. *Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений.* Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2011. 196 с.
8. Киржинов Р. А. Аналог задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2014. Т. 16, № 2. С. 41–46.
9. Киржинов Р. А. О единственности решения аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2015. Т. 17, № 3. С. 28–30.

On the solving of the A. A. Dezin problem analogue for a mixed-type equation by the Green's function method

R. A. Kirzhinov

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, 89 A, Shortanov st., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

For a second order inhomogeneous parabolic-hyperbolic type equation, we consider the A. A. Desin problem analogue with nonhomogeneous nonlocal boundary conditions. In this paper, are proved a solution uniqueness and existence of the problem under investigation. The solution is written out in explicit form by the Green's function method.

Keywords: Dezin problem analogue, parabolic-hyperbolic type equation, nonlocal boundary conditions.

Please cite this article in press as:
Kirzhinov R. A. On the solving of the A. A. Dezin problem analogue for a mixed-type equation by the Green's function method, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 47–49 (In Russian).

Author's Details:

Romazan A. Kirzhinov http://orcid.org/0000-0001-6645-7175
master; Intern Researcher; Dept. of Mixed-Type Equatios; e-mail: kirzhinov.r@mail.ru

Нелокальные обратные задачи для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе

Н. В. Мартемьянова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Аннотация

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа изучаются нелокальные обратные задачи в прямоугольной области. В этих задачах помимо самого решения требуется найти еще и неизвестные множители в правой части. Доказаны критерии единственности. Решения формально построены в виде сумм рядов по системам собственных и присоединенных функций. Получены условия на граничные данные и коэффициенты уравнения, при которых доказаны леммы об отделенности от нуля малых знаменателей коэффициентов формально построенных рядов, и теоремы существования решения.

Ключевые слова: нелокальная задача, обратная задача, оператор Лаврентьева—Бицадзе, спектральный метод, единственность, малые знаменатели, существование.

Для уравнения эллиптико-гиперболического типа

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - bu = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x)g_1(y), & y > 0, \\ f_2(x)g_2(y), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < l,\ -\alpha < y < \beta\}$, где l, α, $\beta > 0$ — данные действительные постоянные, b — некоторое заданное действительное число, $g_1(y)$, $g_2(y)$ — известные функции, поставим нелокальные обратные задачи.

Задача 1. *Найти функции $u(x,y)$ и $f_1(x) = f_2(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1\big(\overline{D}\big) \cap C^2\big(D_- \cup D_+\big); \quad f_i(x) \in C(0,l) \cap L_1[0,l], i = 1,2; \tag{2}$$

$$Lu = f(x,y), (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(l,y), \quad u_x(0,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad u_y(x,-\alpha) = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{5}$$

Образец для цитирования
Мартемьянова Н. В. Нелокальные обратные задачи для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 50–52.

Сведения об авторе
Нина Викторовна Мартемьянова ✉ кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики; e-mail: ninamartem@yandex.ru

Задача 2. *Найти функции $u(x,y)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$, удовлетворяющие условиям* (2)–(5) *и*

$$u_y(x,-\beta)=\varphi_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{6}$$

В задачах 1 и 2 $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0)=\varphi(l)$, $\psi(0)=\psi(l)$, $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$, $D_+=D\cap\{y>0\}$, $D_-=D\cap\{y<0\}$.

Нелокальные обратные задачи по определению правой части уравнения (1), когда $g_1(y)=g_2(y)\equiv 1$, изучались в работах [1, 2]. Локальная обратная задача для уравнения (1) с $g_1(y)\neq 1$ и $g_2(y)\neq 1$ рассматривалась в работе [3].

В данной работе рассматриваются задачи 1, 2 при $g_1(y)\neq 1$ и $g_2(y)\neq 1$. Для обеих обратных задач доказаны критерии единственности их решений. Само решение и неизвестные сомножители построены в виде сумм биортогональных рядов. Если выполнено одно из следующих условий:

$$\text{а)}\quad \frac{\min|g_1(\eta)|}{2g_2(0)}\frac{\operatorname{ch}\lambda_1\beta-1}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_1\beta}}>1;$$

$$\text{б)}\quad \frac{\min|g_1(\eta)|}{g_2(0)}\frac{\operatorname{ch}\lambda_1\beta-1}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_1\beta}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>1 \quad \text{при} \quad g_1(\eta)<0;$$

$$\text{в)}\quad \frac{\min|g_1(\eta)|}{2g_2(0)}\frac{\operatorname{ch}\lambda_1\beta-1}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_1\beta}}-\frac{\operatorname{ch}\lambda_1\beta}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_1\beta}}>1 \quad \text{при} \quad g_1(\eta)>0,$$

где $\lambda_1=\pi/l$, $\eta\in(0;\beta)$, то для любых $\alpha>0$, $l>0$ в задаче 1 получена оценка для малого знаменателя, благодаря которой он получается отделенным от нуля с необходимой асимптотикой. При нарушении условий а) – в), когда число $\widetilde{\alpha}=\alpha\theta/l$, где θ некоторое число из интервала $(0,l)$, является рациональным, установлена аналогичная оценка малого знаменателя. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенных рядов в классах (2).

В задаче 2 в связи с увеличением количества неизвестных функций в постановке задачи добавляется еще одно дополнительное условие (6), что существенно усложняет задачу и возникают трудности с обоснованием существования решения задачи (2)–(6). Получены следующие результаты. В случае, когда $b=0$, если 1) $\widetilde{\xi}=\frac{\xi}{l}$, $\xi=\alpha\theta$ $(0<\theta<1)$ — рациональное, то задача имеет не единственное решение; 2) $\widetilde{\xi}$ — число с неограниченными элементами, тогда не существует решения задачи 2 в виде сумм рядов; 3) $\widetilde{\xi}$ — любое алгебраическое число степени $n\geqslant 2$, $\beta>\beta_0$, то существует единственное решение задачи (2)–(6).

В случае $b\neq 0$ найдены значения ξ, при которых нарушается единственность решения. Кроме этого, для $\widetilde{\xi}$ натуральных, рациональных или любых алгебраических чисел степени $n=2$ получены оценки знаменателя коэффициентов построенных рядов, из которых следует, что решение задачи 2 либо существует единственное, либо существует, но нарушается единственность.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 16-31-00421.

Библиографический список

1. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // *Известия Вузов. Математика*, 2011. № 2. С. 71–85.
2. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // *Сибирский математический журнал*, 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647.
3. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части // *Известия вузов. Математика*, 2017. № 2. С. 44–57.

Nonlocal inverse problems for the equation Lavrentev-Bitsadze operator

N. V. Martemyanova

Samara National Research University
named after Academician S. P. Korolyov,
34, Moskovskoe shosse st., Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

We study nonlocal inverse problems in a rectangular domain for the equation of mixed elliptic-hyperbolic type. For these problems, we find the solution of the equation and unknown multipliers in the right part of the equation. In article, criterion of uniqueness was proved; solutions of equations were formally constructed as a sums of series by systems characteristic and associated functions; lemma about separation from zero of the small denominators the coefficients of the formally derived series and the theorem of existence of solutions are proved.

Keywords: nonlocal problem, inverse problem, Lavrentev–Bitsadze operator, spectral method, uniqueness, small denominators, existence.

Please cite this article in press as:
Martemyanova N. V. Nonlocal inverse problems for the equation Lavrentev-Bitsadze operator, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 50–52 (In Russian).

Authors' Details:

Nina V. Martemyanova ✉ Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: ninamartem@yandex.ru

К задаче Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка

А. Н. Миронов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт (филиал),
Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

Аннотация

Методом интегральных уравнений оказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Построено решение задачи Дарбу в терминах функции типа Римана–Адамара.

Ключевые слова: уравнение Бианки, задача Дарбу, функция Римана–Адамара.

В теории гиперболических уравнений хорошо известен метод Римана, которым могут быть построены формулы решений задач Коши и Гурса. Для задачи Дарбу на плоскости роль функции Римана играет функция Римана—Адамара. Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка на плоскости имеет многочисленные приложения [1].

Уравнением Бианки четвертого порядка называют уравнение

$$\begin{aligned} u_{xyzt} + a_{1110}u_{xyz} + a_{1101}u_{xyt} + a_{1011}u_{xzt} + a_{0111}u_{yzt} + \\ + a_{1100}u_{xy} + a_{1010}u_{xz} + a_{1001}u_{xt} + a_{0110}u_{yz} + a_{0101}u_{yt} + a_{0011}u_{zt} + \\ + a_{1000}u_x + a_{0100}u_y + a_{0010}u_z + a_{0001}u_t + a_{0000}u = f(x,y,z,t). \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты уравнения (1) зависят от (x, y, z, t).

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0 > 0$, $z = 0$, $z = z_0 > 0$, $t = x$, $t = t_0 > 0$. Обозначим через X, Y, Z, S грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = x$ соответственно.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям:*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t), \\ u|_{\overline{Z}} = \varphi_2(x,y,t), \quad u|_{\overline{S}} = \psi(x,y,z), \\ \varphi_1(y,0,t) = \varphi_3(0,y,t), \ \varphi_1(0,z,t) = \varphi_2(0,z,t), \\ \varphi_2(x,0,t) = \varphi_3(x,0,t), \ \varphi_1(y,z,0) = \psi(0,y,z), \\ \varphi_2(x,z,x) = \psi(x,0,z), \ \varphi_3(x,y,x) = \psi(x,y,0), \\ \varphi_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \\ \varphi_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \psi \in C^{(1,1,1)}(\overline{S}). \end{gathered} \quad (2)$$

Образец для цитирования
Миронов А. Н. К задаче Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 53–54.

Сведения об авторе
Алексей Николаевич Миронов http://orcid.org/0000-0002-8818-286X
доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. математики и прикладной информатики; e-mail: miro73@mail.ru

Доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу (1), (2).

Построена формула, дающая решение задачи Дарбу в явном виде в терминах функции, которую естественно назвать функцией Римана—Адамара для уравнения Бианки четвертого порядка. Аналогичный результат для уравнения Бианки третьего порядка был получен в [2].

Библиографический список

1. Моисеев Е. И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* М.: МГУ, 1988. 150 с.
2. Миронов А. Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // *Матем. заметки*, 2017. Т. 102, № 1. С. 64–71. doi: 10.4213/mzm11395.

On Darboux problem for the Bianchi equation of fourth order

A. N. Mironov

Kazan (Volga Region) Federal University,
Yelabuga Institute,
89, Kazanskaya str., Yelabuga, 423603, Russian Federation.

Abstract

The existence and uniqueness of the solution of the Darboux problem are provided by the method of integral equations. The solution of the Darboux problem is constructed in terms of a function similar to the Riemann–Hadamard function.

Keywords: Bianchi equation, Darboux problem, Riemann–Hadamard function.

Please cite this article in press as:
Mironov A. N. On Darboux problem for the Bianchi equation of fourth order, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 53–54 (In Russian).

Author's Details:

Aleksey N. Mironov http://orcid.org/0000-0002-8818-286X
Dr. Phys. Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematics and Applied Informatics;
e-mail: miro73@mail.ru

О приложениях одного класса интегральных уравнений

Л. Б. Миронова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт (филиал),
Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

Аннотация

Доказаны существование и единственность решения для одного класса систем интегральных уравнений с частными интегралами. Рассматриваемый в статье класс интегральных уравнений характеризуется тем, что уравнения содержат интегралы как с переменными, так и с постоянными верхними пределами интегрирования. Сформулирована задача с граничными условиями на пяти сторонах характеристического параллелепипеда для системы уравнений с доминирующими производными второго порядка. Путем сведения задачи к системе уравнений с частными интегралами, опираясь на полученные результаты, доказаны существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: интегральное уравнение с частными интегралами, задача с условиями на характеристиках.

Здесь рассмотрен один класс интегральных уравнений с частными интегралами, то есть уравнений, содержащих неизвестную функцию нескольких переменных под интегралами различной кратности [1–3].

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &w(x_1,\dots,x_n)- \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k^0}^{x_k}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{Q_{l,n}^k}\int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}^1}\dots\int_{x_{q_l}^0}^{x_{q_l}^1} K_{kq_1\dots q_l}(x_1,\dots,x_n,\alpha_{q_1},\dots,\alpha_{q_l},\alpha_{q_k})\times \\ &\qquad\times w(x_1,\dots,x_n)|_{x_k=\alpha_k}|_{x_{q_1}=\alpha_{q_1}}\dots|_{x_{q_l}=\alpha_{q_l}}\times \\ &\qquad\qquad\times d\alpha_{q_l}\dots d\alpha_{q_1}d\alpha_k = F(x_1,\dots,x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

$$Q_{l,n}^k = \{(q_1,\dots,q_l) \mid 1\leqslant q_1<\dots<q_l\leqslant n,$$
$$q_i\in\{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\},\ 1\leqslant i\leqslant l\}.$$

Здесь $(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, $\Omega=[x_1^0,x_1^1]\times\dots\times[x_n^0,x_n^1]$, $x_1^0<x_1^1,\dots,\ x_n^0<x_n^1$, $w=\mathrm{colon}(w^1,\dots,w^m)$, $F=\mathrm{colon}(f^1,\dots,f^m)$, K_ω — матричные функции размерности $m\times m$. Коэффициенты и правая часть уравнения (1) непрерывны в соответствующих замкнутых областях.

Образец для цитирования
Миронова Л. Б. О приложениях одного класса интегральных уравнений / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 55–57.

Сведения об авторе
Любовь Борисовна Миронова http://orcid.org/0000-0002-3299-2601
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. математики и прикладной информатики; e-mail: lbmironova@yandex.ru

Теорема. *Если в уравнении* (1) *все коэффициенты* K_ω *и правая часть* F *непрерывны в соответствующих замкнутых параллелотопах изменения своих переменных, то в параллелотопе* Ω *существует единственное непрерывное решение* $w(x_1, \ldots, x_n)$ *этого уравнения.*

Укажем на одно приложение теоремы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y,z)v_x + b_1(x,y,z)w_x + c_1(x,y,z)u + \\ \qquad +d_1(x,y,z)v + e_1(x,y,z)w + f_1(x,y,z), \\ v_{yy} = a_2(x,y,z)u_y + b_2(x,y,z)w_y + c_2(x,y,z)u + \\ \qquad +d_2(x,y,z)v + e_2(x,y,z)w + f_2(x,y,z), \\ w_{zz} = a_3(x,y,z)u_z + b_3(x,y,z)v_z + c_3(x,y,z)u + \\ \qquad +d_3(x,y,z)v + e_3(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D пространства (x, y, z) выполняются включения a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i = \overline{1,3}$. Решение системы (2) класса u, v, $w \in C^1(D)$, u_{xx}, v_{yy}, $w_{zz} \in C(D)$ назовем регулярным в D.

В параллелепипеде $G = \{x_0 < x < x_1,\, y_0 < y < y_1,\, z_0 < z < z_1\}$, рассмотрим задачу с граничными условиями на пяти его сторонах X, Y, Z, $X_1 = \{(x,y,z) | x = x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$, $Y_1 = \{(x,y,z) | y = y_1, x_0 < x < x_1, z_0 < z < z_1\}$.

Задача. *Найти в* G *регулярное решение* (2), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} u(x_0,y,z) &= \varphi_1(y,z), \quad & (u_x - a_1 v - b_1 w)(x_1,y,z) &= \chi_1(y,z), \\ v(x,y_0,z) &= \varphi_2(x,z), \quad & (v_y - a_2 u - b_2 w)(x,y_1,z) &= \chi_2(x,z), \\ w(x,y,z_0) &= \varphi_3(x,y), \quad & (w_z - a_3 u - b_3 v)(x,y,z_0) &= \psi_3(x,y), \end{aligned}$$

$\varphi_1(y,z) \in C^1(\overline{X})$, $\chi_1(y,z) \in C^1(\overline{X}_1)$, $\varphi_2(x,z) \in C^1(\overline{Y})$, $\chi_2(x,z) \in C^1(\overline{Y}_1)$, $\varphi_3(x,y)$, $\psi_3(x,y) \in C^1(\overline{Z})$.

Опираясь на теорему доказаны существование и единственность решения задачи.

Библиографический список

1. Забрейко П. Н., Калитвин А. С., Фролова Е. В. Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // *Дифференц. уравнения*, 2002. Т. 38, № 4. С. 538–546. doi: 10.1023/A:1016371902018.
2. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.* New York: M. Dekker, 2000. 560 c.
3. Калитвин А. С. *Линейные операторы с частными интегралами.* Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.

On applications of a class of integral equations

L. B. Mironova

Kazan (Volga Region) Federal University,
Yelabuga Institute,
89, Kazanskaya str., Yelabuga, 423603, Russian Federation.

Abstract

The existence and uniqueness of the solution for one class of systems of integral equations with partial integrals are proved. The class of integral equations considered in the article is characterized by the fact that the equations contain integrals with both variables and constant upper limits of integration. The problem with boundary conditions on five sides of the characteristic parallelepiped for one system of equations with dominant derivatives of the second order is formulated. By reducing the problem to a system of equations with partial integrals, based on the our results, the existence and uniqueness of the solution of the problem are proved.

Keywords: partial integral equation, problem with conditions on the characteristics.

Please cite this article in press as:
M i r o n o v a L. B. On applications of a class of integral equations, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 55–57 (In Russian).

Author's Details:

Luybov B. Mironova http://orcid.org/0000-0002-8818-286X
Cand. Phys. Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Applied Informatics;
e-mail: lbmironova@yandex.ru

О колеблющихся решениях дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом со степенной нелинейностью

Ю. Н. Миронова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт (филиал),
Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

Аннотация

Изучается поведение осциллирующих решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом первого порядка. Решения таких уравнений обладают особыми свойствами, которые отсутствуют у соответствующих дифференциальных уравнений без отклонения аргумента. Получены оценки для решений нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием.

Ключевые слова: уравнение с запаздывающим аргументом, интеграл Стилтьеса.

В данной работе изучается поведение колеблющихся решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием со степенной нелинейностью. Решения таких уравнений обладают специфическими свойствами, какими не обладают соответствующие дифференциальные уравнения без отклонений аргумента [1].

Рассматривается уравнение

$$y'(x) = \int_0^\infty y^\alpha(x-s)dr(x,s) \quad (A \leqslant x < \infty), \tag{1}$$

где число $\alpha > 0$, $(-1)^\alpha = -1$. Интегрирование ведется по s при фиксированном x, интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Ядро $r(x,s)$ определено при $x \in [A,\infty)$, $s \in [0,\infty)$ и обеспечивает существование и единственность решения $y(x)$ уравнения (1) на $[A,\infty)$ при начальном условии $y(x) = \varphi(x)$, $x \in (-\infty, A]$, где $\varphi(x)$ — непрерывная на $(-\infty, A]$ функция (используются обозначения, введенные в [1, §6]). Так будет, например, если ядро $r(x,s)$ удовлетворяет условиям, налагаемым на ядра в [1, §1].

Верхнюю грань тех s, для которых $r(x,s) \neq r(x,\infty)$, обозначим через $\Delta(x)$. Пусть

$$\Delta_0 = \sup_{[A,\infty)} \Delta(x), \quad M_0 = \sup_{[A,\infty)} \bigvee_{s=0}^{\infty} r(x,s),$$

Образец для цитирования
Миронова Ю. Н. О колеблющихся решениях дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом со степенной нелинейностью / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 58–60.

Сведения об авторе
Юлия Николаевна Миронова http://orcid.org/0000-0001-8769-767X
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. математики и прикладной информатики; e-mail: mironovajn@mail.ru

$$\Phi_0 = \sup_{(-\infty,A]} |\varphi(x)| < \infty, \quad 0 < \Delta_0 < \infty, \quad 0 < M_0 < \infty.$$

Если $y(x)$ — колеблющееся решение уравнения (1), ядро $r(x,s)$ не убывает по переменной s при каждом фиксированном x и $(-1)^\alpha = -1$, то на любом отрезке длины Δ_0 оно по крайней мере один раз меняет знак.

Теорема. *Пусть ядро $r(x,s)$ является неубывающей функцией s при каждом фиксированном x, $\alpha > 1$, $\Delta_0 M_0 \Phi_0^{\alpha-1} \leqslant 1$ и $y(x)$ — колеблющееся решение уравнения (1). Тогда*

$$|y(x)| \leqslant \left(\frac{\Delta_0 M_0}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\left(\frac{\Delta_0 M_0}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \Phi_0\right)^{\alpha^{\frac{x-A-\Delta_0}{2\Delta_0}}} \qquad (A \leqslant x < \infty).$$

Таким образом, колеблющиеся решения затухают, если

$$\alpha > 1, \quad \Delta_0 M_0 \Phi_0^{\alpha-1} \leqslant 1.$$

Пусть теперь $0 < \alpha < 1$. В этом случае при $\Delta_0 M_0 < 2$ можно доказать ограниченность решения $y(x)$ уравнения (1) на $[A,\infty)$, если оно меняет знак на любом отрезке длины Δ_0. Следует подчеркнуть, что это свойство имеет место и для немонотонного ядра $r(x,s)$, удовлетворяющего условиям, налагаемым на ядра в [1, §1].

Теорема. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\varphi(A) = 0$,*

$$\Delta_0 M_0 < 2$$

и решение $y(x)$ $(A \leqslant x < B)$ меняет знак на любом отрезке $[a, a+\Delta_0]$, $A \leqslant a \leqslant a + \Delta_0$, $B - A > 2\Delta_0$. Тогда

1) $\max\limits_{[A,A+\Delta_0]} |y(x)| \leqslant \frac{\Delta_0 M_0}{2} \Phi_0^\alpha < \Phi_0$ *при* $\Phi_0 \geqslant 1$,

2) $\max\limits_{[A,A+\Delta_0]} |y(x)| < \frac{\Delta_0 M_0}{2}$ *при* $\Phi_0 < 1$.

Отметим, что уравнение (1) с монотонным ядром рассматривалось в [2], а с немонотонным ядром — в [3].

Библиографический список

1. Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* М.–Л.: Гостехиздат, 1951. 255 с.
2. Миронов Н. П. Некоторые свойства одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // *Изв. вузов. Матем.*, 1970. №3. С. 50–55.
3. Миронов Н. П. О решениях дифференциальных уравнений смешанного типа с запаздыванием // *Изв. вузов. Матем.*, 1974. №8. С. 72–76.

On oscillating solutions of first-order delay differential equations with power nonlinearity

Yu. N. Mironova

Kazan (Volga Region) Federal University,
Yelabuga Institute,
89, Kazanskaya str., Yelabuga, 423603, Russian Federation.

Abstract

We study the behavior of oscillating solutions of delay differential equations of the first order. The solutions of such equations have special properties which do not have corresponding differential equations without deviating argument. We obtain some estimations for solutions of nonlinear delay differential equation.

Keywords: delay differential equation, Stieltjes integral.

Please cite this article in press as:
Mironova Yu. N. On oscillating solutions of first-order delay differential equations with power nonlinearity, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 58–60 (In Russian).

Author's Details:

Yulia N. Mironova http://orcid.org/0000-0001-8769-767X
Cand. Phys. Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Applied Informatics;
e-mail: mironovajn@mail.ru

О структуре нелокальных краевых условий, индуцируемых спектром матрицы в системе уравнений Бицадзе—Лыкова, и корректности нелокальных аналогов задачи Коши—Гурса

Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассмотрена система n вырождающихся гиперболических в полуплоскости переменных x и y уравнений типа уравнения Бицадзе—Лыкова с кратными характеристиками. Отмечено влияние спектра матричного коэффициента при младшей производной на корректность постановок задачи Коши—Гурса. На примере матрицы простой структуры, спектр которой принадлежит отрезку $[-1, 1]$, показано, что в задачах Коши—Гурса с данными на любой граничной характеристике области существования решения задачи Коши отсутствует единственность решения. В этих условиях рассмотрены простейшие нелокальные аналоги задачи Коши—Гурса с условиями типа Бицадзе—Самарского. Обоснована их корректность.

Ключевые слова: системы вырождающихся гиперболических уравнений с кратными характеристиками,системы уравнений типа Бицадзе—Лыкова, задача Коши—Гурса, нелокальные краевые задачи, условия типа Бицадзе—Самарского, дробное исчисление, специальные функции.

Систему дифференциальных уравнений

$$y^2\mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} + A\mathbf{u}_x = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; u_2; \ldots; u_n)^T$ — вектор искомых функций, A — постоянная числовая $[n \times n]$-матрица простой структуры, спектр которой $\Lambda(A) \subset [-1, 1]$, рассмотрим в области $\Omega = \left\{(x, y) : 0 < x - \frac{y^2}{2} < x + \frac{y^2}{2} < 1\right\}$.

В ряде публикаций с участием авторов настоящей работы (см. библ. список в [1, 2]) система дифференциальных уравнений (1) с инволютивной матрицей A приводилась как пример системы уравнений, для которой в задачах

Образец для цитирования
Огородников Е. Н., Арланова Е. Ю. О структуре нелокальных краевых условий, индуцируемых спектром матрицы в системе уравнений Бицадзе—Лыкова, и корректности нелокальных аналогов задачи Коши—Гурса / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 61–66.

Сведения об авторах

Евгений Николаевич Огородников http://orcid.org/0000-0002-5889-0590
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: eugen.ogo@gmail.com

Екатерина Юрьевна Арланова http://orcid.org/0000-0002-7341-3450
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: earlanova@gmail.com

Коши—Гурса с данными на любой характеристике, ограничивающей область существования решения задачи Коши, отсутствует единственность решения. В данной работ прежде всего будет показано, что потеря единственности в задачах Коши—Гурса связана не с инволютивностью матричного коэффициента, а с наличием в спектре матрицы A собственных значений $\lambda = \pm 1$. Основная цель работы — выделить такие классы нелокальных краевых условий, которые обеспечивают восстановление единственности решения этой задачи.

Хорошо известно [3], что для системы дифференциальных уравнений (1) корректна по Адамару задача Коши

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,0) &= \tau(x), \\ \mathbf{u}_y(x,0) &= \nu(x), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \in [0,1]$, а вектор-функции $\tau(x), \nu(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. В этом случае регулярное решение $\mathbf{u}(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0,1)) \cap C^2(\Omega)$. Также известно, что для матрицы A простой структуры, собственные значения которой $\lambda_i \in [-1,1]$, $i = \overline{1,n}$, можно указать невырожденное преобразование с матрицей T такое, что в канонической форме матрица $A_\lambda = T^{-1}AT$ будет являться диагональной матрицей $A_\lambda = \operatorname{diag}\{\Lambda_m, E_k, -E_{n-k-m}\}$, где $\Lambda_m = (\delta_{ij}\lambda_i)$ $(i,j = \overline{1,m})$, $E_k = (\delta_{ij})$ $(i,j = \overline{m+1,m+k})$, $E_{n-k-m} = (\delta_{ij}\lambda_i)$ $(i,j = \overline{m+k+1,n})$ — диагональны блоки, δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда для нового искомого вектора $\mathbf{v}(x,y) = T^{-1}\mathbf{u}(x,y)$ получим систему из n независимых дифференциальных уравнений

$$y^2\mathbf{v}_{xx} - \mathbf{v}_{yy} + A_\lambda \mathbf{v}_x = 0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{v}(x,0) = T^{-1}\mathbf{u}(x,0) = T^{-1}\tau(x), \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_y(x,0) = T^{-1}\mathbf{u}_y(x,0) = T^{-1}\nu(x). \tag{5}$$

Обозначим компоненты вектора

$$\mathbf{v}(x,y) = \left(v_{\lambda_1}; \ldots; v_{\lambda_m}; v_{m+1}^{(+)}; \ldots; v_{m+k}^{(+)}; v_{m+k+1}^{(-)}; \ldots; v_n^{(-)}\right)^T,$$

где v_{λ_i} $(i = \overline{1,m})$, $v_i^{(+)}$ $(i = \overline{m+1,m+k})$, $v_i^{(-)}$ $(i = \overline{m+k+1,n})$ — суть линейные комбинации компонент искомого вектора $\mathbf{u}(x,y)$, соответствующие собственным значениям λ_i, $+1$ и -1. Аналогично обозначим компоненты вектора начальных условий (4) и (5), а именно,

$$\mathbf{v}(x,0) = T^{-1}\tau(x) = \left(\tau_{\lambda_1}; \ldots; \tau_{\lambda_m}; \tau_{m+1}^{(+)}; \ldots; \tau_{m+k}^{(+)}; \tau_{m+k+1}^{(-)}; \ldots; \tau_n^{(-)}\right)^T,$$

$$\mathbf{v}_y(x,0) = T^{-1}\nu(x) = \left(\nu_{\lambda_1}; \ldots; \nu_{\lambda_m}; \nu_{m+1}^{(+)}; \ldots; \nu_{m+k}^{(+)}; \nu_{m+k+1}^{(-)}; \ldots; \nu_n^{(-)}\right)^T.$$

Решения задачи Коши с условиями (4) и (5) для дифференциального уравнения (3) в покомпонентной записи будут следующими:

$$v_{\lambda_i}(x,y)=\frac{\sqrt{\pi}y}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)}\int\limits_{x-\frac{y^2}{2}}^{x+\frac{y^2}{2}}\tau_{\lambda_i}(t)\left(t-x+\frac{y^2}{2}\right)^{\beta_i-1}\left(x+\frac{y^2}{2}-t\right)^{\alpha_i-1}dt+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\alpha_i)\Gamma(1-\beta_i)}\int\limits_{x-\frac{y^2}{2}}^{x+\frac{y^2}{2}}\nu_{\lambda_i}(t)\left(t-x+\frac{y^2}{2}\right)^{-\alpha_i}\left(x+\frac{y^2}{2}-t\right)^{-\beta_i}dt, \quad (6)$$

где $\alpha_i=(1-\lambda_i)/4$, $\beta_i=(1+\lambda_i)/4$, $i=\overline{1,m}$;

$$v_i^{(+)}(x,y)=\tau_i^{(+)}\left(x+\frac{y^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y^2/2}^{x+y^2/2}\frac{\nu_i^{(+)}(t)dt}{\sqrt{x+y^2/2-t}},\ i=\overline{m+1,m+k}; \quad (7)$$

$$v_i^{(-)}(x,y)=\tau_i^{(-)}\left(x-\frac{y^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y^2/2}^{x+y^2/2}\frac{\nu_i^{(-)}(t)dt}{\sqrt{t-x+y^2/2}},\ i=\overline{m+k+1,n}, \quad (8)$$

Всюду ниже мы опускаем индекс i у функций и параметров в формулах (6)–(8) и будем писать $v_\lambda(x,y)$, $v^{(+)}(x,y)$, $v^{(-)}(x,y)$.

Обратимся к задачам Коши—Гурса. Удобно задавать значения функции $\mathbf{u}(x,y)$ на характристиках в точках $\Theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},\sqrt{x}\right)$ или $\Theta_1(x)=\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{1-x}\right)$.

В условиях отсутствия единственности решения задач Коши—Гурса с данными на любой из двух характеристик покажем, что достаточно связать любую из них с неизвестным теперь значением искомого вектора $\mathbf{u}(x,0)$ с помощью нелокального условия, например, такого вида:

$$A_i(x)\mathbf{u}[\Theta_i(x)]=B_i(x)\mathbf{u}(x,0)+\mathbf{c}_i(x)\quad(i=0,1). \quad (9)$$

Решение нелокальной краевой задачи с условием (2) и условием (9) при $i=0$ или $i=1$ будет найдено в форме решения задачи Коши.

Приведем пример нелокальной постановки задачи Коши—Гурса с условием (9) при $i=0$. Для вектора $\mathbf{v}(x,y)$ условие будет иметь ту же структуру

$$A_0(x)\mathbf{v}[\Theta_0(x)]=B_0(x)\mathbf{v}(x,0)+\mathbf{c}(x), \quad (10)$$

где вектор $\mathbf{c}(x)=T^{-1}\mathbf{c}_0(x)=\left(c_{\lambda_1};\ldots;c_{\lambda_m};c_{m+1}^{(+)};\ldots;c_{m+k}^{(+)};c_{m+k+1}^{(-)};\ldots;c_n^{(-)}\right)^T$ — заданная вектор-функция.

Пусть $A_0(x)=ax^{\frac{1}{2}-\beta}$, $B_0(x)=b$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

Вычислим значения первых m линейных комбинаций компонент искомого вектора $\mathbf{u}(x,y)$ в точке $\Theta_0(x)$ по формуле (6). Получим в терминах интегральных операторов Римана—Лиувилля

$$v_\lambda(\Theta_0)=\frac{\sqrt{\pi x}}{\Gamma(\beta)}I_{0x}^{\alpha}x^{\beta-1}\tau_\lambda(x)+\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\alpha)}I_{0x}^{1-\beta}x^{-\alpha}\nu_\lambda(x)\quad\left(i=\overline{1,m}\right), \quad (11)$$

или

$$v_\lambda(\Theta_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\beta)} I^{\alpha}_{0x;\beta-1}\tau_\lambda(x) + \frac{\sqrt{\pi x}}{2\Gamma(1-\alpha)} I^{1-\beta}_{0x;-\alpha}\nu_\lambda(x),$$

где использован интегральный оператор Кобера—Эрдейи на конечном отрезке:

$$I^{\alpha}_{cx;\eta} f = \frac{\operatorname{sign}(x-c)}{\Gamma(\alpha)|x-c|^{\alpha+\eta}} \int\limits_c^x \frac{|t-c|^\eta f(t)dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Используя значения $v_\lambda(\Theta_0)$ в условии (10) в форме (11), получим относительно функций $\varphi_\lambda(x) = x^{\beta-1}\tau_\lambda(x)$ $(i = \overline{1,m})$ интегральные уравнения Вольтерры второго рода с ядром Абеля

$$\varphi_\lambda(x) - \mu I^{\alpha}_{0x}\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{b} f_\lambda(x),$$

где $\mu = \frac{a\sqrt{\pi}}{b\Gamma(\beta)}$, $f_\lambda(x) = \frac{a\sqrt{\pi}}{2}\frac{x^{-1/2}}{\Gamma(1-\alpha)} I^{1-\beta}_{0x} x^{-\alpha}\nu_\lambda(x) - x^{\beta-1}c_\lambda(x)$ $(i = \overline{1,m})$. Решения этих m уравнений

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{b}\left(I - \mu I^{\alpha}_{0x}\right)^{-1} f_\lambda(x) = \frac{1}{b}\left(I + \mu E^{\alpha,\alpha}_{0x;\mu}\right)^{-1} f_\lambda(x)$$

находятся в терминах резольвентного оператора

$$E^{\mu,\alpha}_{cx;\lambda} f = \operatorname{sign}(x-c) \int\limits_c^x \operatorname{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;(x-t)) f(t)dt,$$

где $\operatorname{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;x) = x^{\mu-1}E_\alpha(\lambda x^\alpha;\mu)$ — обобщенная дробная экспоненциальная функция [1, 2], $E_\alpha(x;\mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера. Тогда $\tau_\lambda = x^{1-\beta}\varphi_\lambda(x)$.

Для линейных комбинаций компонент исходного вектора $\mathbf{u}(x,y)$, соответствующих значениям собственных чисел $\lambda_i = \pm 1$, получим из (10) простые функциональные соотношения, из которых находим

$$\tau^{(+)}(x) = \left(b - ax^{\frac{1}{2}-b}\right)^{-1}\left(\frac{a\sqrt{\pi}}{2}x^{\frac{1}{2}-\beta} I^{\frac{1}{2}}_{0x}\nu^{(+)}(x) - c^{(+)}(x)\right) \ (i = \overline{m+1, m+k}),$$

$$\tau^{(-)}(x) = \frac{1}{b}\left(\frac{a}{2}x^{\frac{1}{2}-\beta}\int_0^x \frac{\nu^{(-)}(t)dt}{\sqrt{t}} - c^{(-)}(x) - \frac{a}{b}c^{(-)}(0)x^{\frac{1}{2}}\right) \ (i = \overline{m+k+1, n}).$$

Таким образом, определив однозначно вектор $\tau(x) = \mathbf{u}(x,0) = T^{-1}\mathbf{v}(x,0) = T^{-1}(\tau_\lambda(x);\tau^{(+)}(x);\tau^{(-)}(x))^T$, находим решение нелокального аналога задачи Коши—Гурса с условиями (2) и (10) для дифференциального уравнения (1) в форме решения задачи Коши. Чтобы решение находилось в требуемом классе функций, достаточно потребовать выполнение условия $a \neq b$; вектор $\mathbf{c}(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Заслуживает внимания нелокальное условие типа Бицадзе—Самарского, представляющее интерес как для нелокальных аналогов задачи Коши—Гурса, так и для задач Дарбу:

$$A(x)\mathbf{u}[\Theta_i(x)] = B(x)\mathbf{u}(x,0) + H(x)\mathbf{u}_y(x,0) + \mathbf{c}(x). \tag{12}$$

Пусть задано условие (2). Рассмотрим нелокальное условие типа (12)

$$ax^\eta \left[\mathbf{u}(\Theta_0) - \frac{\sqrt{\pi x}}{2\Gamma(1-\alpha)} I^{1-\beta}_{0x;-\alpha}\nu(x)\right] = b\mathbf{u}(x,0) + \mathbf{c},$$

где $a, b > 0$, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

Обозначая далее неизвестный вектор $\mathbf{u}(x,0) = \tau(x)$, для первых m компонент вектора $\mathbf{v}(x,0) = T^{-1}\tau(x) = (\tau_{\lambda_1}; \ldots; \tau_{\lambda_m}; \ldots)^T$ получим m инетгральных уравнений с оператором Кобера—Эрдейи

$$\tau_\lambda(x) - \frac{a\sqrt{\pi}}{b\Gamma(\beta)} x^\eta I^\alpha_{0x;\beta-1}\tau_\lambda(x) = -\frac{1}{b}c_\lambda.$$

Его решение можно предъявить сразу по формуле решения интегрального уравнения (44) из работы [4] при $\sigma = 1$. Получим

$$\tau_\lambda(x) = k_\lambda \mathcal{E}_\eta\left(\lambda x^\eta; \beta - \eta; \frac{1}{2} - \eta\right),$$

где $\lambda = \frac{a\sqrt{\pi}}{b\Gamma(\beta)}$, $k_\lambda = -\frac{c_\lambda}{b}$, а $\mathcal{E}_\eta(z;\nu,\mu)$ — модифицированная функция Килбаса—Сайго, определенная в работе [4] как сумма ряда

$$\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu) = \Gamma\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\begin{pmatrix}k\rho+\nu\\ k\rho+\mu\end{pmatrix} z^n.$$

В зависимости от соотношения параметров α, β, η здесь возникают частные и особые случаи. Во всех случаях компоненты $\tau_\lambda(x)$ однозначно определяются, если $\eta \geqslant 0$. Для остальных компонент вектора $\mathbf{v}(x,0)$ получены простые функциональные равенства, тем самым вектор $\tau(x) = \mathbf{u}(x,0) = T\mathbf{v}(x,0) = T\left(\tau_\lambda; \tau^{(+)}; \tau^{(-)}\right)$ однозначно определен.

Корректность рассмотренных нелокальных аналогов задачи Коши—Гурса следует из корректности задачи Коши. Принадлежность вектор-функции $\tau(x)$ классу функций $C[0,1] \cap C^2(0,1)$ легко проверяется непосредственно.

Библиографический список

1. Огородников Е. Н. Корректность задачи Коши–Гурса для систем вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. Т. 26. С. 26–38. doi: 10.14498/vsgtu173.
2. Огородников Е. Н., Арланова Е. Ю. Некоторые нелокальные аналоги задачи Коши–Гурса и существенно нелокальные краевые задачи для систем уравнений Бицадзе–Лыкова в специальных случаях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005. Т. 34. С. 24–39. doi: 10.14498/vsgtu334.
3. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 1488 с.

4. Огородников Е. Н. О двух специальных функциях, обобщающих функцию типа Миттаг–Леффлера, их свойствах и применении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. Т. 1(26). С. 52–65. doi: 10.14498/vsgtu1067.

On the structure of nonlocal boundary conditions induced by the spectrum of the matrix in the system of Bitsadze–Lykov equations, and the correctness of nonlocal analogues of the Cauchy–Goursat problem

E. N. Ogorodnikov, E. Yu. Arlanova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A system of n degenerate hyperbolic in a half-plane variable x and y equations of the Bitsadze–Lykov type equation with multiple characteristics is considered. The influence of the spectrum of the matrix coefficient with the lowest derivative on the correctness of the Cauchy–Goursat problem is noted. Using the example of a matrix with a simple structure, the spectrum of which belongs to the segment $[-1, 1]$, it is shown that the Cauchy–Goursat problem with data on any boundary characteristic of the domain of existence to the Cauchy problem solution is not unique. Under these conditions, the simplest nonlocal analogues of the Cauchy–Goursat problem with conditions of the Bitsadze–Samarskiy type are considered. Their correctness was justified.

Keywords: systems of degenerate hyperbolic equations with multiple characteristics, systems of equations of Bitsadze–Lykov type, Cauchy–Goursat problem, nonlocal boundary value problems, conditions of Bitsadze–Samarskiy type, fractional calculus, special functions.

Please cite this article in press as:
Ogorodnikov E. N., Arlanova E. Yu. On the structure of nonlocal boundary conditions induced by the spectrum of the matrix in the system of Bitsadze–Lykov equations, and the correctness of nonlocal analogues of the Cauchy–Goursat problem, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 61–66 (In Russian).

Authors' Details:

Evgeniy N. Ogorodnikov http://orcid.org/0000-0002-5889-0590
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: eugen.ogo@gmail.com

Ekaterina Yu. Arlanova http://orcid.org/0000-0002-7341-3450
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: earlanova@gmail.com

Исследование хаотических режимов дробного осциллятора Дуффинга

Р. И. Паровик[1,2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга,
физико-математический факультет,
Россия, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4.
[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Россия, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7.

Аннотация

В работе проведено исследование хаотических режимов дробного осциллятора Дуффинга. Для этого по алгоритму Вольфа с ортогонализацией Грама—Шмидта были рассчитаны спектры максимальных показателей Ляпунова в зависимости от значений управляющих параметров, на основе которых были построены бифуркационные диаграммы. Бифуркационные диаграммы позволили определить области, в которых существует хаотический колебательный режим. Также были построены фазовые траектории, которые подтвердили результаты исследований.

Ключевые слова: дробный осциллятор Дуффинга, алгоритм Вольфа, спектр максимальных показателей, бифуркационные диаграммы.

Введение. Исследование случайных, хаотических, периодических или квазипериодических режимов различных колебательных систем (осцилляторов) является важной задачей в теории колебательных систем [1, 2]. Существуют достаточно много критериев и тестов для определения хаотических режимов. Одни методы основываются на исследовании спектра колебаний с помощью Фурье-анализа (тест 0-1), а другие основаны на отображении Пуанкаре — сечении фазовой траектории секущей поверхностью. Известно, что хаотические колебания обладают высокой чувствительностью к малым изменениям начальных условий. Поэтому оценка разбегания фазовых траекторий с помощью максимальных показателей Ляпунова является одним из надежных методов определения хаоса в рассматриваемой динамической системе. Наличие положительного максимального показателя Ляпунова является критерием идентификации хаотического режима для рассматриваемой системы [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу Коши для дробного осциллятора Дуффинга [4]:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) + a\partial_{0t}^{\gamma} x(\eta) - x(t) + x^3(t) = \delta\cos(\omega t), x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \qquad (1)$$

Образец для цитирования
Паровик Р. И. Исследование хаотических режимов дробного осциллятора Дуффинга / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 67–69.

Сведения об авторе
Роман Иванович Паровик http://orcid.org/0000-0002-1576-1860
кандидат физико-математических наук, доцент; декан, ведущий научный сотрудник; физико-математический факультет, лаб. моделирования физических процессов;
e-mail: romanparovik@gmail.com

здесь $a > 0$ — коэффициент трения, δ и ω — амплитуда и частота внешнего периодического воздействия, x_0 и y_0 — заданные константы, которые определяют начальное состояние колебательной системы. В уравнении (1) дифференциальные опираторы с дробными порядками $1 < \beta < 2$, $0 < \gamma < 1$ понимаются в смысле Герасимова—Капуто [5]. Задача Коши (1) описывает дробный осциллятор Дуффинга, который был исследован в работах [4, 5]. Далее в работе с помощью явной конечно-разностной схемы [5] для решения задачи (1) и алгоритма Вольфа [3] с процедурой ортогонализации Грама—Шмидта были построены спектры максимальных показателей Ляпунова при различных значениях управляющих параметров, по аналогии с работой [6].

2. Результаты моделирования. В качестве одного из примеров моделирования на рис. 1 приведены бифуркационные диаграммы для максимальных показателей Ляпунова при различных значениях коэффициента трения a, а на рис. 2 приведены соответствующие фазовые траектории.

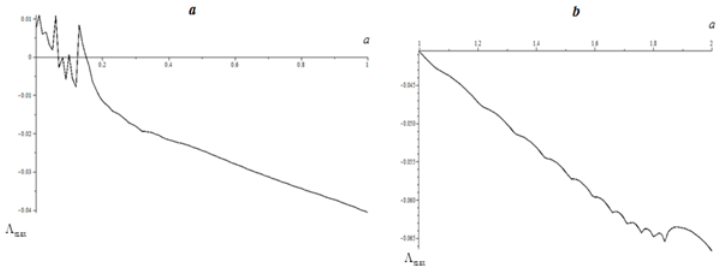


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы спектра максимальных показателей Ляпунова для фрактального осциллятора Дуффинга в зависимости от значений параметра a: кривая (a), построенная для параметра $a \in [0, 1]$ шагом $\Delta a = 0.01$; кривая (b), построенное для параметра $a \in [1, 2]$ с шагом $\Delta a = 0.01$

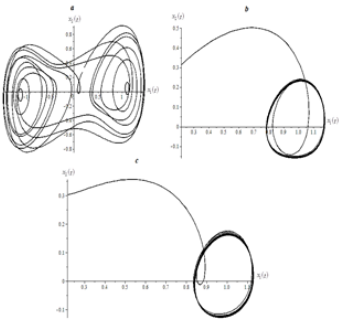


Рис. 2. Фазовые траектории, построенные согласно бифуркационным диаграммам (рис. 1) в зависимости от значений параметра a: фазовая траектория (a), построенная для параметра $a = 0.01$; фазовая траектория (b), построенная для параметра $a = 0.9$; фазовая траектория (c), построенная для параметра $a = 1.5$

Заключение. Согласно исследованию спектров максимальных показателей Ляпунова можно сделать вывод о том, что дробный осциллятор Дуффинга обладает хаотической динамикой. В частности видно, что на рис. 1, *a* в спектре присутствуют положительные значения при изменении коэффициента трения от 0 до 1. Аналогичные исследования были проведены для управляющих параметров β и γ.

Благодарность. Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации МК-1152.2018.1.

Библиографический список

1. Хаяси Т. *Нелинейные колебания в физических системах.* М: Мир, 1968. 432 с.
2. Кузнецов С.П. *Динамический хаос.* М.: Физматлит, 2001. 296 с.
3. Wolf A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* vol. 16. pp. 285–317.
4. R. I. Parovik Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction // *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2015. no. 1(10). pp. 18–24. doi: https://doi.org/10.18454/2079-6641-2015-10-1-18-24.
5. R. I. Parovik Mathematical model of a wide class memory oscillators // *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2018. vol. 11, no. 2. pp. 108–122. doi: https://doi.org/10.14529/mmp180209.
6. Р. И. Паровик Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 364–379. doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1611.

Investigation of chaotic regimes of fractional Duffing oscillator

R. I. Parovik[1,2]

[1] Vitus Bering Kamchatka State University,
Faculty of Physics and Mathematics,
4, Pogranichnaya, Petropavlovsk-Kamchatskiy, 683032, Russian Federation.
[2] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation,
7, Mirnaya st., Kamchatka region, Paratunka, 684034, Russian Federation.

Abstract

In the work, the study of chaotic regimes of the Duffing fractal oscillator was carried out. For this purpose, Wolf's algorithm with Gram–Schmidt orthogonalization was used to calculate the spectra of Lyapunov's maximum exponents as a function of the values of the control parameters on the basis of which bifurcation diagrams were constructed. Bifurcation diagrams made it possible to determine the regions in which there exists a chaotic oscillatory regime. Phase trajectories were also constructed, which confirmed the results of the studies.

Keywords: Duffing's fractional oscillator, Wolff algorithm, maximum exponent spectrum, bifurcation diagrams.

Please cite this article in press as:
P a r o v i k R. I. Investigation of chaotic regimes of fractional Duffing oscillator, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 67–69 (In Russian).

Author's Details:

Roman I. Parovik http://orcid.org/0000-0002-1576-1860
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dean, Leading Researcher; Faculty of Phys. & Math., Lab. of Modeling Physical Processes; e-mail: romanparovik@gmail.com

Обобщенной гладкости функции спектральных разложение по собственным функциям полигармонического оператора

Ш. Т. Пирматов

Ташкентский государственный технический университет,
Узбекистан, 100100, Ташкент, ул. Университетская, 2.

Аннотация

Рассматриваются спектральные разложения, связанные с самосопряженным расширением полигармонического оператора в n-мерной области. Доказывается, если спектральное разложение произвольной функции в некоторой точке суммируется средними Рисса, то ее среднее значение по сфере с центром в указанной точке обладает определенной гладкостью.

Ключевые слова: спектральное разложение, спектр, гладкость, средние Рисса, собственная функция.

Пусть $\{u_k(x)\}$ — полная ортонормированная система собственных функций рассматриваемого самосопряженного расширения полигармонического оператора, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k\}$:

$$\Delta^m u_k(x) = (-1)^m u_k(x).$$

Для любого $s \geqslant 0$ введем средние Рисса:

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_k<\lambda} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^s f_k u_k(x) = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f(x).$$

Среднее значение порядка $\alpha \geqslant 0$ функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ в данной точке $x \in \Omega$ определяется следующим образом:

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{1}{\omega(N,\alpha) r^N} \int_{|y|\leqslant r} \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} f(x+y)dy,$$

где

$$\omega(N,\alpha) = \int_{|y|\leqslant 1} (1-|y|^2)^{\alpha-1} dy.$$

Основным результатом являются следующие теоремы:

Образец для цитирования
Пирматов Ш. Т. Обобщенной гладкости функции спектральных разложение по собственным функциям полигармонического оператора / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 70–71.

Сведения об авторе
Шамшод Тургунбоевич Пирматов ✉ кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; e-mail: shamshod@rambler.ru

Теорема 1. *Пусть $\alpha > s - (N-3)/2$ и в некоторой точке $x \in \Omega$ спектральное разложение функции $f \in L_2(\Omega)$ суммируется средними Рисса порядка s:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda^s f(x) = f(x). \tag{1}$$

Тогда

$$\lim_{r\to\ 0} S_r^\alpha f(x) = f(x).$$

Теорема 2. *Пусть действительные числа $s \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant 0$ и натуральное число m удовлетворяют условию*

$$s + m - \alpha > (N-3)/2.$$

Если выполняется условия (1), то $\phi_\lambda(r) = S_r^\alpha f(x)$ является m раз непрерывно дифференцируемой на интервале $0 < r < \mathrm{dis}\{x, \partial\Omega\}$.

The generalized smoothness of function spectral decomposition on own functions of the polyharmonic operator

Sh. T. Pirmatov

Tashkent State Technical University,
2, University st., Tashkent, 100100, Uzbekistan

Abstract

The spectral decomposition connected with self-conjugate expansion of the polyharmonic operator in n-dimensional area is considered. It is proved if spectral decomposition of any function in some point is summarized by Riesz's means, then its average value on the sphere with the center in the specified point has a certain smoothness.

Keywords: spectral decomposition, spectrum, smoothness, Riesz's means, own function.

Please cite this article in press as:
Pirmatov Sh. T. The generalized smoothness of function spectral decomposition on own functions of the polyharmonic operator, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 70–71 (In Russian).

Author's Details:

Shamshod T. Pirmatov Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor;
e-mail: shamshod@rambler.ru

Задача со свободными границами для квазилинейного параболического уравнения типа реакции-диффузии

М. С. Расулов

Институт Математики имени В. И. Романовского,
Узбекистан, 100041, Ташкент, Улица Мирзо Улугбека, 81.

Аннотация

В данной работе исследуется задача для квазилинейного параболического уравнения с двумя свободными границами. Для решения задачи установлены априорные оценки норм Гельдера. На основе априорных оценок доказано существование и единственность решения.

Ключевые слова: свободная граница, квазилинейное параболическое уравнение, реакция-диффузия, асимтотическое поведение.

Введение. В настоящее время ведутся интенсивные исследования новых классов нестандартных задач со свободной границей, которые возникают в приложениях. Например, в работах [1,2] изучены задачи для параболических уравнений с двумя свободными границами.

В настоящей работе исследуется диффузионная логистическая модель со свободной границей популяционной биологии [3].

Постановка задачи. Требуется найти функций $h\,(t)$, $s\,(t)$, $u\,(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leqslant T, h\,(t) < x < s\,(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$k(u)u_t - du_{xx} = u(a - bu), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -s_0 \leqslant x \leqslant s_0, \tag{2}$$

$$u(t,h(t)) = 0, \quad u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$h'(t) = -\mu u_x\big(t,h(t)\big), \quad s'(t) = -\mu u_x\big(t,s(t)\big) \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

где $s(0) = s_0$, $h\,(0) = h_0 = -s_0$, $x = h\,(t)$ и $x = s\,(t)$ –свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией $u(t,x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

(I) функции $k\,(u)$ и $k'\,(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на замкнутом множестве аргумента, причем $k\,(u) \geqslant k_0 > 0$;

(II) d, a, b, s_0, μ — положительные постоянные.

Задача (1)–(4) исследована в работе [1] при $k(u) = 1$.

Образец для цитирования
Расулов М. С. Задача со свободными границами для квазилинейного параболического уравнения типа реакции-диффузии / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 72–73.

Сведения об авторе
Мирожиддин Собиржонович Расулов ✉ старший научный сотрудник; лаб. математического моделирования нелинейных систем; e-mail: rasulovms@bk.ru

Теорема. *Пусть функции $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ являются решением задачи (1)–(4). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, не зависящие от T, для которых справедливы оценки*

$$0 < u(t,x) \leqslant M_1, \quad (t,x) \in \bar{D},$$
$$0 < s'(t), \quad -h'(t) \leqslant M_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Заключение. Установлены априорные оценки шаудерского типа. На основе установленных оценок изучена поведение свободной границы. Доказаны теорема единственности и существование решения задачи (1)–(4). Далее исследованы асимптотическое поведение решении при $t \to +\infty$.

Библиографический список

1. Du Y., Lin Z. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary // *SIAM J. Math. Anal*, 2010. vol. 42, no. 1. pp. 377–405. doi: 10.1137/090771089.
2. Wang R. H., Wang L., Wang Z. Ch. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // *J. Math. Anal. Appl*, 2018. vol. 467, no. 2. pp. 1233–1257. doi: 10.1016/j.jmaa.2018.07.065.
3. Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // *Indian J.Pure Appl.Math*, 2019. vol. 50, no. 1. pp. 95–112. doi: 10.1007/s13226-019-0309-8.

The problem with free boundaries for a quasilinear parabolic equation of the reaction-diffusion type

M. S. Rasulov

Institute of mathematics,
81, Mirzo Ulugbek st.,Tashkent, 10041, Uzbekistan.

Abstract

In this paper, we study the problem for a quasilinear parabolic equation with two free boundaries. To solve the problem, a priori estimates of the Hölder norms are established. On the basis of a priori estimates, the existence and uniqueness of the solution is proved. Some qualitative properties of the solution were also investigated.

Keywords: free boundary, quasilinear parabolic equation, reaction-diffusion, asymtotic behavior.

Please cite this article in press as:
Rasulov M. S. The problem with free boundaries for a quasilinear parabolic equation of the reaction-diffusion type, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 72–73 (In Russian).

Author's Details:

Mirojiddin S. Rasulov Senior Researcher; Lab. of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems; e-mail: rasulovms@bk.ru

Видоизмененные задачи для уравнения Эйлера—Дарбу в случае параметров по модулю равных 1/2

И. Н. Родионова

Совместная научно-исследовательская лаборатория математической физики,
Россия, 443011, Самара, Академика Павлова, 1.

Аннотация

Рассматривается уравнение Эйлера—Дарбу с параметрами, равными по модулю 1/2, и обобщение на пространственный аналог. В силу того, что задача Коши в классической ее постановке является некорректной для таких значений параметров, авторы предлагают постановки и решения видоизмененных задач типа Коши при значениях параметров: а) $\alpha = \beta = 1/2$, б) $\alpha = -1/2$, $\beta = +1/2$, в) $\alpha = \beta = -1/2$. Результат, полученный авторами, используется для постановки аналога задачи Δ_1 в первом квадранте с заданием граничных условий со смещением на координатных осях и нестандартными условиями сопряжения на линии сингулярности коэффициентов уравнения $y = x$. Первое из этих условий склеивает производные по нормали искомого решения, второе содержит предельные значения комбинации самого решения и его нормальных производных. Поставленная задача свелась к однозначно разрешимой системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: уравнение Эйлера—Дарбу с параметрами, задача Коши, видоизмененная задача типа Коши, метод Римана, граничные условия со смещением, интегральные уравнения, условиями сопряжения на линии сингулярности.

Введение. Уравнения Эйлера—Дарбу—Пуассона

$$U_{xy} + \frac{\beta}{y-x}U_x - \frac{\alpha}{y-x}U_y = 0 \tag{1}$$

имеют широкое применение в газовой и гидродинамике, теории оболочек, в различных разделах механики сплошных сред.

В силу того, что вырождающиеся уравнения гиперболического типа в характеристических координатах сводятся к уравнению (1), исследованием краевых задач для уравнения Эйлера—Дарбу занимались многие советские и зарубежные математики. Подробная библиография по этому вопросу содержится в монографии М. М. Смирнова [1].

В работе [2] проведен подробный анализ основных результатов по постановке и решению как классических, так и новых видоизмененных краевых

Образец для цитирования
Родионова И. Н. Видоизмененные задачи для уравнения Эйлера—Дарбу в случае параметров по модулю равных 1/2 / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 74–77.

Сведения об авторе
Ирина Николаевна Родионова ✉ кандидат физико-математических наук; доцент;
e-mail: mvdolg@yandex.ru

задач для уравнения (1), библиография ее содержит труды самарских математиков.

Основные результаты по постановке и исследованию краевых задач для уравнения (1) получены при условиях, налагаемых на параметры уравнения: $0 < |\alpha|, |\beta|, |\alpha+\beta| < 1$. Отметим, что задача Коши для уравнения (1) при $\alpha = \beta$, $0 < |\beta| < 1/2$ в классической постановке с условиями

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau(x), \qquad \lim_{y\to x+0} (y-x)^{2\beta}(U_y - U_x) = \nu(x), \quad y > x,$$

(τ, ν — заданные функции) является некорректной при $|\alpha| = |\beta| = 1/2$ в силу того, что либо само решение, либо его производная по нормали (в зависимости от знака β) на линии сингулярности коэффициентов $y = x$ обращается в бесконечность.

В настоящей работе автором предлагается расширить постановку и решение видоизмененных задач типа Коши [3, 4] для уравнения (1) в случаях: а) $\alpha = \beta = 1/2$; б) $\alpha = +1/2$, $\beta = -1/2$; в) $\alpha = \beta = -1/2$ (Задачи C_1, C_2, C_3, соответственно).

В задаче C_1 на линии $y = x$ задаются условия:

$$\lim_{y\to x+0} (y-x)(U_y - U_x) = \nu_1(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty,$$

$$\lim_{y\to x+0} \left[U(x,y) - \nu_1(x)\left(\ln\sqrt{y-x} + \psi\Big(\frac{1}{2}\Big) - \psi(1)\right)\right] = \tau_1(x);$$

в задаче C_2:

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau_2(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty;$$

$$\lim_{y\to x+0} \left[(U_y - U_x) - \frac{d}{dx}U(x,x)\left(\ln\sqrt{(y-x)} + 2\psi\Big(\frac{1}{2}\Big) - 2\psi(1) + 1\right)\right] = \nu_2(x),$$
$$0 \leqslant x < +\infty;$$

и в задаче C_3:

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau_3(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty;$$

$$\lim_{y\to x+0} \left[(U_y - U_x)(y-x)^{-1} - \frac{d^2}{dx^2}U(x,x)\left(\ln\sqrt{(y-x)} + \psi\Big(\frac{3}{2}\Big) - \psi(3)\right)\right] =$$
$$= \nu_3(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Задача C_1 решена методом Римана, C_2, C_3 получены из формулы общего решения уравнения Эйлера—Дарбу.

На основе получаемых результатов доказана однозначная разрешимость видоизмененной задачи Δ_1^S в области, представляющей первый квадрант, с краевыми условиями на координатных осях и сопряжением на линии $y = x$.

Задача Δ_1^S. На множестве $\mathtt{D}$ найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$U(0,y) = \varphi_1(y), \qquad 0 \leqslant y < +\infty,$$

$$U(x,0) - \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int_0^x \nu_2(t)\, t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln\Big(\frac{t}{x}\Big)dt = \varphi_2(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$$

На линии сингулярности коэффициентов уравнения заданы условия сопряжения:

$$\nu_1(x) = \lim_{y\to x+0}(y-x)(U_y - U_x) = -\lim_{y\to x-0}(x-y)(U_x - U_y) = -\nu_2(x),$$

$$\tau_1(x) = \lim_{y\to x+0}\left[U(x,y) - \nu_1(x)\left(\ln\sqrt{y-x} + \psi\Big(\frac{1}{2}\Big) - \psi(1)\right)\right] =$$

$$= \lim_{y\to x-0}\left[U(x,y) - \nu_2(x)\left(\ln\sqrt{x-y} + \psi\Big(\frac{1}{2}\Big) - \psi(1)\right)\right] = \tau_2(x).$$

На заданные функции φ_k, $k = 1, 2$ налагаются условия: $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(x) \in C^{(3)}[0, +\infty)$, $k = 1, 2$.

Единственность решения задачи Δ_1^S следует из единственности, полученной методом Римана, решения видоизмененной задачи Коши, взятого за основу, и однозначной разрешимости системы интегральных уравнений, получаемой в процессе решения задачи. Существование решения доказано проверкой.

Заключение. Получено единственное решение трех видоизмененных задач типа Коши для уравнения Эйлера—Дарбу в случае параметров, равных по модулю одной второй. На основе решения видоизмененной задачи Коши доказана однозначная разрешимость обобщений Δ_1-задачи с данными на координатных осях и условиями сопряжения на линии сингулярности коэффициентов уравнения. Решение задачи Δ_1 получено в явном виде.

Библиографический список

1. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения.* Минск: Вышэйшая школа, 1977. 158 с.
2. Нахушев А. М. О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Диффер. уравнения*, 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
3. Rodionova I. N., Dolgopolov V. M., Dolgopolov M. V. Delta-problems for the generalized Euler–Darboux equation // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 417–422. doi: 10.14498/vsgtu1557.
4. Долгополов М. В., Родионова И. Н., Долгополов В. М. Об одной нелокальной задаче для уравнения Эйлера—Дарбу // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 2. С. 259–275. doi: 10.14498/vsgtu1487.

The modified problems for the equation of Euler–Darboux in the case of parameters on the module equal to 1/2

I. N. Rodionova

Research Laboratory of Mathematical Physics,
1, Academician Pavlov, Samara, 443011, Russian Federation.

Abstract

We consider the Euler–Darboux equation with parameters modulo 1/2 and generalization to the space 3D analogue. Due to the fact that the Cauchy problem in its classical formulation is incorrect for such parameter values, the authors propose formulations and solutions of modified Cauchy-type problems with parameter values: a) $\alpha = \beta = 1/2$, b) $\alpha = -1/2$, $\beta = +1/2$, c) $\alpha = \beta = -1/2$. The obtained result is used to formulate an analogue of the Δ_1 problem in the first quadrant with the setting of boundary conditions with displacement on the coordinate axes and non-standard conjugation conditions on the singularity line of the coefficients of the equation $y = x$. The first of these conditions glues the normal derivatives of the desired solution, the second contains the limit values of the combination of the solution and its normal derivatives. The problem was reduced to a uniquely solvable system of integral equations.

Keywords: Euler–Darboux equation with parameters, modified Cauchy problem, Riemann method, boundary conditions with displacement, integral equations, conditions of conjugation at the singularity lines.

Please cite this article in press as:
Rodionova I. N. The modified problems for the equation of Euler–Darboux in the case of parameters on the module equal to 1/2, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 74–77 (In Russian).

Authors' Details:

Irina N. Rodionova Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor;
e-mail: mvdolg@yandex.ru

Асимптотические оценки разностей произведений функций Бесселя на интеграл от этих функций

К. Б. Сабитов[1,2]

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Факультет математики и информационных технологий,
Россия, 453103, Стерлитамак, проспект Ленина, 37.

Аннотация

В работе посредством вычисления новой формулы нахождения конечной биномиальной суммы вычислены разности произведений цилиндрических функций на определенный интеграл от этих функций и на их основе установлены асимптотические оценки при больших значениях параметра.

Ключевые слова: функции Бесселя первого, второго рода, модифицированные функции Бесселя, интегралы от функций Бесселя, разности произведений цилиндрических функций на интеграл от этих функций, вычисление, конечная биномиальная сумма, обобщенная гипергеометрическая функция, асимптотические оценки.

При исследовании обратных задач по отысканию правой части вырождающихся уравнений смешанного типа [1–10] возникла задача об установлении асимптотических оценок для следующих разностей:

$$N_\nu^{(1)}(y) = \sqrt{y} I_\nu(py^q) \int_0^y \sqrt{s} I_{-\nu}(ps^q) ds - \sqrt{y} I_{-\nu}(py^q) \int_0^y \sqrt{s} I_\nu(ps^q) ds, \quad (1)$$

$$N_\nu^{(2)}(y) = \sqrt{y} I_\nu(py^q) \int_0^y \sqrt{s} K_\nu(ps^q) ds - \sqrt{y} K_\nu(py^q) \int_0^y \sqrt{s} I_\nu(ps^q) ds,\ y > 0; \quad (2)$$

$$S_\nu^{(1)}(y) = \sqrt{-y} J_\nu\big(p(-y)^q\big) \int_0^y \sqrt{-s} J_{-\nu}\big(p(-s)^q\big) ds - \\ - \sqrt{-y} J_{-\nu}\big(p(-y)^q\big) \int_0^y \sqrt{-s} J_\nu\big(p(-s)^q\big) ds, \quad (3)$$

Образец для цитирования
Сабитов К. Б. Асимптотические оценки разностей произведений функций Бесселя на интеграл от этих функций / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 78–80.

Сведения об авторе
Камиль Басирович Сабитов http://orcid.org/0000-0001-9516-2704
доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры; каф. высшей математики; e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

$$S_\nu^{(2)}(y) = \sqrt{-y}J_\nu\big(p(-y)^q\big)\int_0^y \sqrt{-s}Y_\nu\big(p(-s)^q\big)ds-$$
$$-\sqrt{-y}Y_\nu\big(p(-y)^q\big)\int_0^y \sqrt{-s}J_\nu\big(p(-s)^q\big)ds,\ y<0, \quad (4)$$

при $p \to +\infty$, где $\nu = 1/(2q) = 1/(m+2)$, $m > 0$ — показатель степени вырождения уравнения, $J_{\pm\nu}(\cdot)$ и $Y_\nu(\cdot)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, $I_{\pm\nu}(\cdot)$ и $K_\nu(\cdot)$ — модифицированные функции Бесселя, $p = \mathrm{const} > 0$.

В данной работе, используя разложения функций $I_{\pm\nu}(x)$ и $J_{\pm\nu}(x)$ в степенной ряд, аналогично работам [11, 12] вычислены разности (1)–(4):

$$N_\nu^{(1)}(y) = \frac{y^2\sin\nu\pi}{2\nu\pi}\,{}_1F_2\left(1; 1+2\nu, 1+\nu; \frac{p^2}{4}y^{1/\nu}\right), \quad (5)$$

$$N_\nu^{(2)}(y) = \frac{y^2}{4\nu}\,{}_1F_2\left(1; 1+2\nu, 1+\nu; \frac{p^2}{4}y^{1/\nu}\right), \quad (6)$$

$$S_\nu^{(1)}(y) = -\frac{y^2\sin\nu\pi}{2\nu\pi}\,{}_1F_2\left(1; 1+2\nu, 1+\nu; -\frac{p^2}{4}(-y)^{1/\nu}\right), \quad (7)$$

$$S_\nu^{(2)}(y) = -\frac{y^2}{4\nu}\,{}_1F_2\left(1; 1+2\nu, 1+\nu; -\frac{p^2}{4}(-y)^{1/\nu}\right), \quad (8)$$

здесь ${}_1F_2(\cdot)$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

В силу найденных представлений (5)–(8) установлены асимптотические оценки при $p \to +\infty$.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020516).

Библиографический список

1. Сабитов К. Б., Рахманова Л. Х. Начально-граничная задача для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // *Дифференц. уравнения*, 2008. Т. 44, № 9. С. 1175–1181.
2. Сабитова Ю. К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 12. С. 49–58.
3. Бурханова (Хаджи) И. А. Критерий единственности решения обратной задачи уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина // *Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Труды международной научной конференции*, 2013. Т. 1. С. 140–144.
4. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365.
5. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // *Изв. вузов. Математика*, 2015. № 1. С. 46–59.
6. Сабитова Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // *Матем. заметки*, 2015. Т. 98, № 3. С. 393–406.
7. Мартемьянова Н. В. Необходимое и достаточное условие единственности решения нелокальной обратной задачи для уравнения типа Чаплыгина / *Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной*

к 110-летию со дня рождения академика А. Н. Тихонова (Стерлитамак, 17–19 ноября 2016): Ч. III. Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. С. 19–23.

8. Сабитова Ю. К. Задача Дирихле для уравнения гиперболического типа со степенным вырождением в прямоугольной области // *Дифференц. уравнения*, 2018. Т. 54, № 2. С. 228–238.
9. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // *Journal of Mathematical Sciences*, 2019. vol. 236, no. 6. pp. 603–640.
10. Сидоров С. Н. Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // *Сибирские электронные математические известия*, 2019. Т. 16. С. 144–157.
11. Сабитов К. Б. Вычисление определенных интегралов от произведения бесселевых функций // *Вестник МГУ. Серия 15*, 1992. № 1. С. 26–33.
12. Сабитов К. Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений // *Дифференц. уравнения*, 1992. Т. 28, № 7. С. 1138–1145.

Asymptotic estimates for the difference of products of Bessel functions by the integral of these functions

K. B. Sabitov[1,2]

[1] Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Sterlitamak branch of the Bashkir State University,
Faculty of Mathematics and Information Technology,
37, Lenina prospekt, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

In the work, by calculating the new formula for finding the finite binomial sum, the differences of the products of cylindrical functions by a definite integral from these functions are calculated and asymptotic estimates are established for them with large values of the parameter.

Keywords: Bessel functions of the first, second kind, modified Bessel functions, integrals of Bessel functions, differences of products of cylindrical functions on the integral of these functions, calculation, finite binomial sum, generalized hypergeometric function, asymptotic estimates.

Please cite this article in press as:
Sabitov K. B. Asymptotic estimates for the difference of products of Bessel functions by the integral of these functions, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 78–80 (In Russian).

Author's Details:
Kamil B. Sabitov http://orcid.org/0000-0001-9516-2704
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Analysis;
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Обратные задачи для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа по отысканию сомножителей правой части

С. Н. Сидоров[1,2]

[1] Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ,
Россия, 453103, г. Стерлитамак, ул. Одесская, 68
[2] Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Факультет математики и информационных технологий,
Россия, 453103, Стерлитамак, проспект Ленина, 37.

Аннотация

Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа изучены обратные задачи по определению сомножителей правых частей, зависящих от времени. На основе формулы решения прямой задачи решение обратных задач эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений, доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, начально-граничная задача, обратные задачи, единственность, существование, ряд, малые знаменатели, интегральные уравнения.

Для уравнения смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt}, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x) g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x) g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области

$$D = \big\{(x,t) \big| \, 0 < x < l, \, -\alpha < t < \beta\big\},$$

где n, m, l, α, β — заданные положительные действительные числа, $f_i(x)$, $i = 1, 2$ — известные функции, поставим следующие обратные задачи.

Задача 1. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C\big(\overline{D}\big) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1\big(\overline{D}\big) \cap C_x^2\big(D_+\big) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

Образец для цитирования
Сидоров С. Н. Обратные задачи для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа по отысканию сомножителей правой части / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 81–83.

Сведения об авторе
Станислав Николаевич Сидоров кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. прикладной математики и информатики; e-mail: stsid@mail.ru

$$g_1(t) \in C[0,\beta];$$
$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$
$$u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$
$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta, \tag{6}$$

здесь $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ — *известные функции,* x_0 — *заданная точка из интервала* $(0,l)$.

Задача 2. *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $g_2(t)$, *удовлетворяющие условиям* (2), (3)–(5) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0],$$
$$u(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant 0, \tag{7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ — *известные функции.*

В задачах условия (6) и (7) являются дополнительными для определения функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$.

Исследование задач 1 и 2 проводится на основе решения прямой начально-граничной задачи (2), (3)–(5), изученной ранее в [1–3] для однородного уравнения (1), т.е. когда $F(x,t) \equiv 0$, а в работах [4, 5] при $F(x,t) \neq 0$. В статьях [6, 7] были изучены обратные задачи для уравнения (1) по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$. А в статьях [8, 9] рассмотрены обратные задачи 1 и 2 для уравнения (1), когда $n > 0$, $m = 0$ и $n = 0$, $m > 0$.

На основе формулы решения прямой начально-граничной задачи (2), (3)–(5) решение обратных задач 1 и 2 эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

Библиографический список

1. Сидоров С. Н. Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2012. Т. 14, № 3. С. 30–40.
2. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365.
3. Сидоров С. Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // *Известия вузов. Математика*, 2015. № 12. С. 55–64.
4. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.* М.: Наука, 2016. 271 с.
5. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // *Journal of Mathematical Sciences*, 2019. vol. 236, no. 6. pp. 603–640.
6. Сидоров С. Н. Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*, 2014. № 19(190). Вып. 36. С. 91–104.

7. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // *Изв. вузов. Математика*, 2015. № 1. С. 46–59.
8. Сидоров С. Н. Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // *Сибирские электронные математические известия*, 2019. Т. 16. С. 144–157.
9. Сидоров С. Н. Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // *Уфимский математический журнал*, 2019. Т. 11, № 1. С. 72–86.

Inverse problems for a degenerate equation of a mixed parabolic-hyperbolic type for finding the factors of the right side

S. N. Sidorov[1,2]

[1] Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan
68, Odessksaya st., Sterlitamak, 453103, Russian Federation
[2] Sterlitamak branch of the Bashkir State University,
Faculty of Mathematics and Information Technology,
37, Lenina prospekt, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

For a mixed parabolic-hyperbolic type equation with a power degeneration on the type change line, inverse problems are considered to determine the time-dependent factors of right-hand sides. Based on the formula for solving a direct problem, the solution of inverse problems is equivalently reduced to the solvability of loaded integral equations. Using the theory of integral equations, we prove the corresponding theorems of uniqueness and the existence of solutions of the stated inverse problems and give explicit formulas for the solution.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary value problem, inverse problems, uniqueness, existence, series, small denominators, integral equations.

Please cite this article in press as:
S i d o r o v S. N. Inverse problems for a degenerate equation of a mixed parabolic-hyperbolic type for finding the factors of the right side, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 81–83 (In Russian).

Authors' Details:

Stanislav N. Sidorov ✉ Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: stsid@mail.ru

Обобщенные потенциалы двойного слоя плоской теории упругости в классах Харди

А. П. Солдатов

Вычислительный центр им. А .А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 42.

Аннотация

Получено интегральное представление общего решения системы Ламе плоской анизотропной теории упругости в классах Харди, Гельдера и в классе непрерывных в замкнутой области функций. Описаны ядро и коядро оператора этого представления. В ортотропном и изотропном случаях упругой среды даны явные выражения через модули упругости. Указаны приложения к решению двух основных краевых задач теории упругости.

Ключевые слова: обобщенные потенциалы двойного слоя, плоская теория упругости, анизотропия, система уравнений Ламе.

В плоской анизотропной теории упругости [1, 2] вектор смещения $u = \big(u_1, u_2\big)$ удовлетворяет эллиптической системе Ламе

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \big(a_{12} + a_{21}\big)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$
$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы α_j матричных коэффициентов, называемые модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Из (1) видно, что соотношения

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} - a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y},$$

Образец для цитирования
Солдатов А. П. Обобщенные потенциалы двойного слоя плоской теории упругости в классах Харди / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 84–90.

Сведения об авторе
Александр Павлович Солдатов доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; e-mail: soldatov48@gmail.com

определяют вектор-функцию $v = \big(v_1, v_2\big)$, которая называется сопряженной к решению u системы Ламе. Закон Гука заключается в том, что столбцы $\sigma_{(1)}$ и $\sigma_{(2)}$ тензора напряжений σ выражаются через частные производные функции v по x и y, соответственно.

Заметим, что функция v постоянна тогда и только тогда, когда u является многочленом первой степени вида $u_1(x,y) = \lambda_1 - \lambda_0 y$, $u_2(x,y) = \lambda_1 + \lambda_0 x$. Решение u системы Ламе этого типа называем тривиальными.

Хорошо известно, что эта система сильно эллиптична, так что характеристический многочлен $\det\big[a_{11} + \big(a_{12} + a_{21}\big)z + a_{22}z^2\big] = 0$ не имеет вещественных корней. Пусть ν_1 и ν_2 — его корни в верхней полуплоскости, взятые с учетом кратности, т.е. либо $\nu_1 \neq \nu_2$, либо $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Соответственно этим двум случаям положим

$$J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем существенную роль будут играть не сами корни ν, а их сумма и произведение, которые обозначим, соответственно $s = \nu_1 + \nu_2$ и $t = \nu_1\nu_2$.

Введем матрицу $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, удовлетворяющую условиям

$$a_{11}b + (a_{12} + a_{21})\, bJ + a_{22}bJ^2 = 0, \quad \det\begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix}.$$

Такая матрица существует, причем она обратима и определена с точностью до умножения справа на обратимую матрицу, коммутирующую с J. Аналогичным свойством обладает и матрица $c = -a_{21}b - a_{22}bJ$, которая также обратима и вместе с b играет большую роль.

Лемма 1. *Матрицы* $2D_{11} = b\big(J - J^*\big)b^{-1}$, $D_{21} = cb^{-1}$, $D_{12} = bc^{-1}$, *где* x^* *означает присоединенную матрицу с элементами* $x^*_{11} = x_{11}$, $x^*_{22} = x_{22}$, $x^*_{21} = -x_{21}$, $x^*_{12} = -x_{12}$, *и однородные степени нуль матрицы-функции*

$$B(\xi) = b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}b^{-1}, \quad C(\xi) = c(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}c^{-1}$$

переменной $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}$ *зависят только от коэффициентов системы* (1). *Точнее, их элементы являются рациональными функциями переменных* s, t *и модулей упругости* $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$. *Это же верно и для вещественных матриц-функций*

$$\begin{aligned} H_{11}(\xi) &= \operatorname{Im}[B(\xi)], \quad & H_{12}(\xi) &= \operatorname{Im}\Big[(cb^{-1})B(\xi)\Big], \\ H_{22}(\xi) &= \operatorname{Im}[C(\xi)], \quad & H_{12}(\xi) &= \operatorname{Im}\Big[(bc^{-1})C(\xi)\Big]. \end{aligned} \tag{2}$$

Введем пару вещественных функций

$$p(n,\xi) = |\xi|^{-2}\big(n_1\xi_1 + n_2\xi_2\big), \quad q(n,\xi) = |\xi|^{-2}\big(n_1\xi_2 - n_2\xi_1\big)$$

двух переменных, которые линейны по n и однородны степени -1 по ξ.

Пусть область D ограничена ляпуновским контуром Γ, d_1t есть элемент длины дуги и $n(t)$ означает единичный вектор внешней нормали в точке $t \in \Gamma$. Очевидно, для скалярной вещественной функции $\varphi \in L^1(\Gamma)$ пара равенств

$$(P\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma p[n(t), t-z]\varphi(t)d_1t, \quad (Q\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma q[n(t), t-z]\varphi(t)d_1t, \quad z \in D,$$

определяют, соответственно, гармоническую в D функцию и сопряженную к ней функцию. Первая из них представляет собой классический потенциал двойного слоя.

Точно также, исходя из суммируемой вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ на Γ, рассмотрим интегралы

$$(P_{kr}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} p[n(t), t-z]\varphi(t)H_{kr}(t-z)d_1t, \quad k, r = 1, 2,$$

с матрицами-функциями (2). Аналогичные операторы, где роль $z \in D$ играет точка $t_0 \in \Gamma$, обозначим P^*_{kr}, в рассматриваемом случае ляпуновского контура Γ их ядра имеют слабую особенность, так что эти операторы компактны в пространстве $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$.

Теорема 1. *Каждая пара равенств $u = P_{11}\varphi$, $v = \mathrm{Im}\big(cb^{-1}\big)Q\varphi - P_{21}\varphi$ и $v = P_{22}\varphi$, $u = \mathrm{Im}\big(bc^{-1}\big)Q\varphi - P_{12}\varphi$ определяет решение u системы Ламе, и сопряженную к ней функцию v.*

В несколько ином виде эта теорема приведена в [3, 4], где, в частности, роль Q играет $-Q$.

Введем для решений системы (1) класс Харди, который как и для аналитических или гармонических функций определяется следующим образом. Пусть $\Gamma \in C^{1,\mu}$ и последовательность контуров $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к Γ в этом классе, т.е. существуют такие диффеоморфные отображения α_n контура Γ на Γ_j, что $\alpha_n(t) - t \to 0$ при $n \to \infty$ по норме пространства $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Тогда для $1 < p < \infty$ класс $H^p(D)$ состоит из решений u системы (1), для которых L^p- нормы на контурах Γ_n равномерно ограничены. Аналогичным образом этот класс определяется и для функций, сопряженных к этим решениям.

Для аналитических функций это определение обобщает классический класс Харди в единичном округе и принадлежит В. И. Смирнову, М. А. Лаврентьеву и М. В. Келдышу [5]. В этом случае для него также используется обозначение $E^p(D)$.

Теорема 2. (*a*) *Относительно нормы*

$$|u| = \sup\nolimits_{n=1,2,\ldots} |u|_{L^p(\Gamma_n)}$$

пространство $H^p(D)$ банахово. При этом его элементы u допускают угловые предельные значения $u^+(t)$ для почти всех $t \in \Gamma$, функция u^+ принадлежит $L^p(\Gamma)$ и оператор $u \to u^+$ ограничен $H^p(D) \to L^p(\Gamma)$.

(*b*) *Сопряженная функция v к решению $u \in H^p(D)$ системы (1) также принадлежит $H^p(D)$, причем отображение $u \to v$, где $v(z_0) = 0$ в фиксированной точке $z_0 \in D$, ограничено в H^p.*

(*c*) *Операторы P_{kk}, $k = 1, 2$, ограничены $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$, $C(\Gamma) \to C(\overline{D})$ и при дополнительном предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ ограничены $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$, $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, а операторы P^*_{kk} компактны в каждом из пространств $L^p(\Gamma)$, $C(\Gamma)$, $C^\mu(\Gamma)$, $C^{1,\mu}(\Gamma)$. При этом имеет место формула граничных значений $(P_{kk}\varphi)^+ = \varphi + P^*_{kk}\varphi$.*

Для аналитических и гармонических функций утверждения теоремы 2 хорошо известны, в частности, для гармонических функций предложение (b) составляет классическую теорему М. Рисса [5].

Область D вообще говоря многосвязна и может быть как конечной, так и бесконечной (т.е. содержать внешность некоторого круга), удобно этот факт указывать значением σ_D, принимающей значения, соответственно, 1 и 0. В последнем случае решение (1) подчиняется условию $\operatorname{grad} u = O(|z|^{-2})$ при $z = x + iy \to \infty$. Сопряженная функция v к u может быть многозначной, т.е. допускать приращения при обходе связных компонент границы. Характер многозначности можно фиксировать следующим образом. Пусть контур Γ составлен из m простых контуров, один из которых в случае $\sigma_D = 1$ является внешним.

Лемма 2. *Существует конечномерное пространство $U \subseteq C^1(\overline{D})$ ($V \subseteq C^1(\overline{D})$) размерности $2(m-1)$ решений u системы Ламе (сопряженных функций v к решениям этой системы), для ненулевых элементов которого сопряженная функция (решение системы Ламе, сопряженная к которому совпадает с v) многозначна. При этом существует такой оператор $\mathcal{P}$ ($\mathcal{Q}$) проектирования класса всех решений u системы Ламе (сопряженных функций к решениям этой системы) в области D на U (V), что сопряженная функция к $u - \mathcal{P}u$ (решение системы Ламе, сопряженное к $v - \mathcal{Q}v$) всегда однозначна.*

Интегралы $P_{11}\varphi$ естественно назвать обобщенными потенциалами двойного слоя для системы Ламе, и аналогичный смысл имеет этот термин для интегралов $P_{22}\varphi$ по отношению к сопряженным функциям. Возникает вопрос о том, в какой мере эти интегралы описывают решения $u \in H^p$ системы Ламе и, соответственно, сопряженные к ним функции $v \in H^p$.

Теорема 3. (*a*) *Любое решение $u \in H^p(D)$, $1 < p < \infty$, системы Ламе (функция $v \in H^p(D)$, $1 < p < \infty$, сопряженная к решению этой системы) единственным образом представляется в виде*

$$u = P_{11}\varphi + \mathcal{P}u + \big(1 - \sigma_D\big)\xi \quad \big(v = P_{22}\varphi + \mathcal{Q}v + (1 - \sigma_D)\xi\big), \tag{3}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $\varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2\big) \in L^p(\Gamma)$ удовлетворяет условиям ортогональности всем вектор-функциям, постоянным на связных компонентах Γ и равным нулю на внешнем контуре в случае $\sigma_D = 1$.

(*b*) *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \mu < \nu$, и в условиях* (*a*) *функции u или v принадлежат одному из классов $C(\overline{D})$, $C^\mu(\overline{D})$, $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Тогда в их представлении* (3) *функция φ принадлежит соответствующим классам $C(\Gamma)$, $C^\mu(\Gamma)$, $C^{1,\mu}(\Gamma)$.*

Из этой теоремы совместно с леммой 2, в частности, следует, что операторы P_{kk} фредгольмовы $H^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$, $C(\Gamma) \to C(\overline{D})$, $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ и $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, причем их индекс равен нулю, а размерности ядра и коядра — равны $2(m - \sigma_D)$. Эта теорема анонсирована в [3] и приведена с полным доказательством в [4].

Утверждение (a) теоремы для u позволяет осуществить эквивалентную редукцию задачи Дирихле $u^+ = f$ в каждом из четырех классов H^p, C, C^μ, $C^{1,\mu}$ к системе, полученной соответствующим конечномерным возмущением граничного интегрального уравнения Фредгольма второго рода $\varphi + P_{11}^*\varphi = f$. Точно также обстоит дело со второй краевой задачей, в которой задана нормальная компонента $\sigma n = \sigma_{(1)}n_1 + \sigma_{(2)}n_2$ тензора напряжений на границе. Ее можно переформулировать по отношению к задаче Дирихле для сопряженной функции v и, таким образом, рассматривать ее в указанных выше

классах. Тогда она сводится к системе, полученной конечномерным возмущением уравнения $\varphi + P_{22}^{*}\varphi = f$.

Остановимся подробнее на структуре матриц-функций (2).

Лемма 3. *В обозначениях леммы* 1 *в терминах скалярных*

$$\omega(\xi) = \big(\xi_1 + \nu_1\xi_2\big)\big(\xi_1 + \nu_2\xi_2\big) = \xi_1^2 + s\xi_1\xi_2 + t\xi_2^2, 2\omega_1(\xi) = s\xi_1^2 + 2t\xi_1\xi_2 + \bar{s}t\xi_2^2$$

и матричных

$$\Omega(\xi) = \begin{pmatrix} (t-1)\xi_1\xi_2 + s\xi_1^2 & t|\xi|^2 \\ -|\xi|^2 & (t-1)\xi_1\xi_2 - s\xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Omega_1(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \\ \xi_2^2 & \xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

квадратичных форм однородные степени 2 *матрицы-функции*

$$G_{kr}(\xi) = |\xi|^{-2}|\omega(\xi)|^2 H_{kr}(\xi)$$

выражаются равенствами:

$$\begin{aligned} &G_{11}(\xi) = \operatorname{Im}\big[\omega_1(\xi) + \overline{\omega(\xi)}D_{11}\big], \quad G_{22}(\xi) = \operatorname{Im}\big[\Omega_1(\xi)D_{22}\big], \\ &G_{21}(\xi) = |\xi|^{-2}\operatorname{Re}[\omega(\xi)\Omega(\xi)]\big(\operatorname{Im} D_{21}\big) + G_{22}(\xi)\big(\operatorname{Re} D_{21}\big), \\ &G_{12}(\xi) = |\xi|^{-2}\big(\operatorname{Im} D_{12}\big)\operatorname{Re}[\omega(\xi)\Omega(\xi)] + \big(\operatorname{Re} D_{12}\big)G_{22}(\xi), \end{aligned}$$

где матрица D_{22} *имеет своими элементами*

$$\big(D_{22}\big)_{11} = \big(D_{22}\big)_{22} = t \quad \text{и} \quad \big(D_{22}\big)_{21} = s, \quad \big(D_{22}\big)_{12} = \bar{s}t.$$

В несколько ином виде эта лемма приведена в [4,6]. В общем анизотропном случае явные выражения элементов матриц D_{kr} очень громоздки. Положение упрощается в ортотропном случае, когда $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$. В этом случае характеристическое уравнение системы (1) биквадратно и симметричные комбинации $s = \nu_1 + \nu_2$, $t = \nu_1\nu_2$ его корней в верхней полуплоскости выражаются через модули упругости по формулам $s = i\rho_0$, $t = \rho^2$, где положительные числа ρ и ρ_0 определяются равенствами

$$\rho^2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad \rho_0^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 + 2\alpha_3\big(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4\big)}{\alpha_2\alpha_3}.$$

В этом случае для однородных степени 2 матриц-функций $G_{kr}(\xi)$ в лемме 1(b) имеем выражения

$$G_{11}(\xi) = \frac{\rho_0}{\alpha'}\begin{pmatrix} \rho^2\big(\alpha_2\xi_1^2 + \alpha_3\xi_2^2\big) & \big(\alpha_3 + \alpha_4\big)\xi_1\xi_2 \\ \rho^2\big(\alpha_3 + \alpha_4\big)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad G_{22}(\xi) = \rho_0\begin{pmatrix} \xi_1^2 & \rho^2\xi_1\xi_2 \\ \xi_1\xi_2 & \rho^2\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$G_{21}(\xi) = \frac{\alpha_3\rho_0\rho^2}{\alpha'}\begin{pmatrix} \xi_1\xi_2|\xi|^{-2}\omega_{(1)}(\xi) & -\alpha_2\omega_0(\xi) - \alpha_0\rho^{-2}\xi_1^2 \\ \alpha_2\omega_0(\xi) + \alpha_0\xi_2^2 & \rho^{-2}\xi_1\xi_2|\xi|^{-2}\omega_{(2)}(\xi) \end{pmatrix},$$

$$G_{12}(\xi) = \frac{\rho_0\rho^2}{\alpha''}\begin{pmatrix} -\rho^{-2}\xi_1\xi_2|\xi|^{-2}\omega_{(1)}(\xi) & \rho^2\alpha_2\omega_0(\xi) - \alpha_0\xi_2^2 \\ -\alpha_2\omega_0(\xi) + \alpha_0\rho^{-2}\xi_1^2 & -\xi_1\xi_2|\xi|^{-2}\omega_{(2)}(\xi) \end{pmatrix},$$

где для краткости положено $\alpha' = \alpha_3 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$, $\alpha'' = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2$, $\alpha_0 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4$ и введены квадратичные формы $\omega_0(\xi) = \xi_1^2 - \rho^2\xi_2^2$ и

$$\omega_{(j)}(\xi) = \xi_1\xi_2|\xi|^{-2}[\alpha_2(\rho^2+1)h_0(\xi) + (-1)^j(\alpha_2\rho_0^2\xi_j^2 - \alpha_0|\xi|^2)], \quad j = 1, 2.$$

Эти формулы еще более упрощаются в случае изотропной среды, когда для ортотропной среды выполнены соотношения $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4$ или, что равносильно, $\rho = 1$, $\rho_0 = 2$. В этом случае имеем кратный корень $\nu = i$, выполнено неравенство $\alpha_1 > \alpha_3$ и в обозначениях положительной постоянной $æ = (\alpha_1 + \alpha_3)/(\alpha_1 - \alpha_3)$ и квадратичной формы $\omega_0(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2$ получаются особенно простые выражения

$$G_{11}(\xi) = \frac{1}{æ}\begin{pmatrix} æ|\xi|^2 + \omega_0(\xi) & 2\xi_1\xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 & æ|\xi|^2 - \omega_0(\xi) \end{pmatrix}, \quad G_{11}(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi_1^2 & 2\xi_1\xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 & 2\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$G_{21}(\xi) = \frac{\alpha_3}{æ}\begin{pmatrix} -4\xi_1\xi_2 & -(æ-1)|\xi|^2 - 2\omega_0(\xi) \\ (æ-1)|\xi|^2 - 2\omega_0(\xi) & 4\xi_1\xi_2 \end{pmatrix},$$

$$G_{12}(\xi) = \frac{1}{4\alpha_3}\begin{pmatrix} 4\xi_1\xi_2 & -(æ-1)|\xi|^2 + 2\omega_0(\xi) \\ (æ-1)|\xi|^2 + 2\omega_0(\xi) & -4\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

для матриц G_{kr}.

Библиографический список

1. Купрадзе В. Д. *Методы потенциала в теории упругости.* М.: Физматгиз, 1963.
2. Лехницкий С. Г. *Теория упругости анизотропного тела.* М.Л.: Физматгиз, 1950.
3. Солдатов А. П. Обобщенные потенциалы двойного слоя анизотропной плоской теории упругости // *Докл. РАН*, 2015. Т. 462, № 1. С. 526–529.
4. Солдатов А. П. К теории анизотропной плоской упругости / *Труды Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 22–29 августа, 2014). Часть 3* / СМФН, Т. 60. М.: РУДН, 2016. С. 114–163.
5. Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1972.
6. Солдатов А. П. Явное описание обобщенных потенциалов двойного слоя для системы Ламе // *Докл. РАН*, 2015. Т. 463, № 5. С. 21–25.

Generalized potentials of general solution of plate elasticity in the Hardy space

A. P. Soldatov

Dorodnicyn Computing Centre, RAS (CC RAS),
42, Vavilova st., Moscow, 119333, Russian Federation.

Abstract

An integral representation of general solution of the Lame system of plate elasticity is received in the Hardy and Holder classes and in the class of continuous functions in a closed domain. The kernal and co-kernal of this representation are described. In orthotropic and isotropic an elastic medium, their explicit expression is given in terms of elastic moduli. Applications to the solution of two main boundary value problems of the theory of elasticity are also indicated.

Keywords: generalized double layer potentials, flat theory of elasticity, anisotropy, Lamé system of equations.

Please cite this article in press as:
Soldatov A. P. Generalized potentials of general solution of plate elasticity in the Hardy space, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 84–90 (In Russian).

Author's Details:

Aleksandr P. Soldatov ✉ Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher;
e-mail: soldatov48@gmail.com

О параболо-параболической модели одной экологической проблемы

Ж. О. Тахиров

Институт математики АН РУз,
Узбекистан, 100125, Ташкент, ул. М. Улугбека, 81.

Аннотация

В работе предлагается математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой. Модель в виде системы двух параболических уравнений содержит реакционно-диффузионные и логистические члены. Проводится исследование модели. Установлены априорные оценки и доказана однозначная разрешимость задачи.

Ключевые слова: математическая модель, реакция-диффузия, априорные оценки.

Загрязнение атмосферного воздуха является одной из самых серьезных экологических проблем многих промышленных регионов.

Возникает необходимость в решении задачи оценок и моделирования распространения загрязняющих частиц с целью предотвращения или уменьшения их воздействия на экосистему.

Пусть в начальный момент времени происходит выброс загрязнения в окружающую среду концентрации u_0. Основное предположение данной модели состоит в том, что окружающая среда активно абсорбирует и перерабатывает загрязнение вплоть до некоторого предела. Анализ этой модели показывает, что в системе «окружающая среда — загрязнение» возможно три качественно различных сценария. Во-первых, при малых выбросах загрязнения наблюдается устойчивая ситуация, когда загрязнения полностью перерабатывается окружающей средой. При увеличении мощности выбросов загрязнения устанавливается так называемая бистабильная ситуация: в зависимости от внешних условий и случайных причин природа может находится в удовлетворительном состоянии, но может и погибнуть. Третья ситуация — полное вымирание природы, экологическая катастрофа.

В настоящее время остается ряд сложных в математическом отношении задач, связанных с краткосрочными прогнозами распространения загрязняющих веществ в природной среде. Оперативное решение подобных прогностических задач требует разработки нестационарных моделей массопереноса в условиях турбулентной атмосферы и создания алгоритмов и численных методов решения соответствующих математических уравнений и их систем в ограниченных пространственно-временных интервалах [1, 2].

Образец для цитирования
Тахиров Ж. О. О параболо-параболической модели одной экологической проблемы / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 91–93.

Сведения об авторе
Тахиров Жозил Останович http://orcid.org/0000-0002-0023-5673
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделом; отдел математического моделирования нелинейных систем; e-mail: prof.takhirov@yahoo.com

Известно, что активные примеси в процессе распространения в атмосфере вступает в химические реакции с водяным паром или другими компонентами атмосферы и переходит из одного химического состояния в другое, изменяя при этом характер токсичности в отношении к окружающей среде.

Следовательно, считаем нужным модификацию модели в виде параболического уравнения посредством включения реакционно-диффузионного члена, что приводит к так называемой логистической модели. А в настоящее время логистические модели широко применяются при описании различных физических и биологических процессов [3, 4]. Автор логистических моделей П. Ферхюльст выскзал догадку, что в случае очень быстрого роста концентрации должны включаться механизмы саморегуляции. Квадратичный член в правой части уравнения отражает внутренние взаимодействия, которые ограничивают рост концентрации.

Общая идея моделей взаимодействующих популяций [5] может быть применима и к системе «загрязнение-природа».

Предположим, что загрязнение находится в постоянном взаимодействии с окружающей средой; окружающая среда оказывает очищающий эффект на загрязнение; система загрязнение-окружающая среда рассматривается как замкнутая.

Пусть $u(t,P)(v(t,P))$ — концентрация загрязнения (плотность биомассы) в момент времени t в точке $P=(x,y,t)$ и Ω — ограниченная область в R^3 с гладкой границей $\partial\Omega$ и внешней нормалью ν.

Предлагается модель в виде краевой задачи для двухкомпонентной нелинейной системы вида:

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u + \nabla\cdot(\theta u) + r_1 u\left(1-\frac{u}{K_1}\right) - \frac{a_1 uv}{b_1+c_1 u} \text{ в } Q_T, \\ v_t = d_2\Delta v + \nabla\cdot(\theta v) + r_2 v\left(1-\frac{v}{K_2}\right) - \frac{a_2 uv}{b_2+c_2 u} \text{ в } Q_T, \end{cases}$$

$$u(0,x)=u_0(x)\geqslant 0, v(0,x)=v_0(x)\geqslant 0, x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{\partial v}{\partial\nu}=0 \quad \text{на} \quad S_T.$$

Здесь $d_i (i=1,2)$ коэффициенты диффузии, $\theta=\theta_x i+\theta_y j+\theta_z k$ (i, j, k — единичные векторы в направнении осей x, y, z) — вектор скорости частиц воздуха, $r_i v\left(1-\frac{v}{K_i}\right)$ — логистический рост скорости компонент, $f_i=\frac{a_i uv}{b_i+c_i\xi}$ (где $\xi=u$ при $i=1$, $\xi=v$ при $i=2$) — трофические функции (или же функции взаимодействия), $f_1\geqslant 0$ — описывается распад и химические превращения загрязнения (т.е. абсорбирование и переработку загрязнения окружающей средой), $f_2\geqslant 0$ — член, описывающий деструктивное влияние загрязнения на окружающую среды, K_1 — предельное значение концентрации загрязнения, K_2 — предельное значение биомассы, r_1 — скорость роста концентрации загрязнения, r_2 — скорость роста концентрации биомассы; $\frac{b_1}{a_1}=\lambda_1>0$ описывает степень влияния природы на загрязнение: чем больше его величина, тем меньше степень поглощения загрязнения живой природой и наоборот; $\frac{b_2}{a_2}=\lambda_2>0$ — степень влияния загрязнения на природу.

Заключение. Исследования проведены по следующей схеме. Сначала описывается схема построения математической модели.

Далее при помощи L_p — параболических оценок и оценок Шаудеровского типа установлена глобальная однозначная классическая разрешимость задачи.

При определенных ограничениях на данные задачи с помощью метода покоординатного расщепления трехмерной задачи на систему трех связных одномерных подзадач дается обоснование структуры алгоритма численного эксперимента.

Библиографический список

1. Марчук Г. И. *Математическое моделирование в проблемах окружающей среды.* М.: Наука, 1982. 320 с.
2. Наац В. И., Наац И. Э. *Математиские модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы.* М.: Физматлит, 2009. 328 с.
3. Cantrell R.S., Costner C. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations.* England: Wiley, 2003. 428 pp.
4. Tao Y. Boundness in a chemotaxis model with oxygen consumption by bacteria // *J. Math. Anal. and Appl.*, 2011. vol. 381. pp. 521–529.
5. Pao C.V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations.* New York: Plenum Press, 1992. 778 pp.

On the parabolic-parabolic model of one environmental problem

J. O. Takhirov

Institute of Mathematics,
81, M. Ulugbek str., Tashkent, 100125, Uzbekistan.

Abstract

The paper proposes a mathematical model of the interaction of pollution with the environment. The model in the form of a system of two parabolic equations contains reaction-diffusion and logistic terms. A study of the model. A priori estimates are established and the unique solvability of the problem is proved.

Keywords: mathematical model, reaction-diffusion, a priori estimates.

Please cite this article in press as:
T a k h i r o v J. O. On the parabolic-parabolic model of one environmental problem, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 91–93 (In Russian).

Author's Details:

Jozil O. Takhirov http://orcid.org/0000-0002-0023-5673
Doct. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems; e-mail: prof.takhirov@yahoo.com

Нелинейная задача Флорина для квазилинейного уравнения диффузии с учетом нелинейной конвекции

Р. Н. Тураев

Институт Математики имени В. И. Романовского,
Узбекистан, 100041, Ташкент, Улица Мирзо Улугбека, 81.

Аннотация

В настоящей работе изучается нелокальная задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с учетом нелинейной конвекции. Установлены априорные оценки Шаудерского типа. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. В итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задач при помощи метода неподвижной точки Шаудера.

Ключевые слова: нелокальная задача Флорина, уравнение диффузии, априорные оценки Шаудерского типа, нелинейная конвекция, принцип экстремума, существование и единственность решения.

Введение. Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать нелокальные задачи со свободной границей для различных параболических уравнений. Задачи со свободной границей с нелокальными граничными условиями используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, вызываемого сточными водами [1].

В настоящей работе изучается нелокальная задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с учетом нелинейной конвекции.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leqslant T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$ такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leqslant N$, $s(t)$ — удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leqslant T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a\big(u_x\big)u_{xx}(t,x) + b\big(u_x\big)u_x^2(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0, \tag{2}$$

Образец для цитирования
Тураев Р. Н. Нелинейная задача Флорина для квазилинейного уравнения диффузии с учетом нелинейной конвекции / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 94–96.

Сведения об авторе
Тураев Расул Нортожиевич ✉ кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. математического моделирования нелинейных систем;
e-mail: rasul.turaev@mail.ru

$$u_x(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$
$$\alpha u(t,0)) = u(t,s(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$
$$u_x(t,s(t)) = \omega(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

В одномерном пространстве уравнение диффузии конвекции с нелинейным членом может быть записано в следующем общем виде:

$$u_t = au_{xx} + \big(b(u)\big)_x.$$

В этой формулировке представлены коэффициент диффузии, $b(u)$ — нелинейная функция конвективного потока, $b'(u)$ — может рассматриваться как нелинейная скорость [2].

Нелинейные задачи диффузии со свободными граничными условиями обычно используются для описания расширения и распространения биологических видов или химических веществ, а свободная граница используется для представления границы этого расширения [2].

В нашем случае в уравнении (1) коэффициент диффузии $a\big(u_x\big)$ задан в нелинейным форме, а нелинейный поток $b\big(u_x\big)u_x^2(t,x)$ — также задан в нелинейном виде.

Относительно данных задач в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1) функции $a\big(u_x\big)$ и $a'\big(u_x\big)$ определены и непрерывны для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a\big(u_x\big) \geqslant a_0 > 0$, $b\big(u_x\big) \leqslant -b_0 < 0$;
2) постоянные α, s_0 удовлетворяют неравенствам $-1<\alpha<0$, $s(0)=s_0 > 0$;
3) $\varphi(x)$ трижды, $\psi(t)$, $\omega(t)$ один раз — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'''(x)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$ — удовлетворяют условию Гельдера;
4) выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч. в рассматриваемых вспомогательных задачах), в частности $\varphi'(0) = \psi(0)$, $\alpha\varphi(0) = \varphi(s_0)$, $\varphi'(s_0) = \omega(0)$.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t)$, $u(t,x)$ и их производных, а также исследуются характер и гладкость свободной границы $s(t)$. Для этого, продифференцировав уравнение (1) в D по x, для $u_x(t,x) = v(t,x)$ получим следующую задачу:

$$v_t(t,x) = a(v)v_{xx}(t,x) + a'_v(v)\cdot v_x^2(t,x) + b'_v(v)\cdot v^2(t,x)\cdot v_x(t,x) + \\ + 2b(v)v(t,x)\cdot v_x(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{6}$$

$$v(0,x) = \varphi'(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0, \tag{7}$$
$$v(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$
$$v(t,s(t)) = p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$\omega(t)\cdot \dot{s}(t) = \alpha a\big(\psi(t)\big)v_x(t,0) - a\big(\omega(t)\big)v_x\big(t,s(t)\big) + \alpha b\big(\psi(t)\big)\psi^2(t) - \\ - b\big(\omega(t)\big)\omega^2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

Алгоритм исследования следующий. Сначала задача сводится к задаче типа Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливается априорные оценки свободной границы и решений и их производных в норме Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [1, 3].

Заключение. Установлены априорные оценки шаудерского типа. На основе установленных оценок изучена поведение свободной границе. Установлен эквивалентность задачи (1)–(5) и (6)–(10). Далее доказаны теорема единственности задачи (1)–(5) и существование решение задачи (6)–(10).

Библиографический список

1. Тахиров Ж. О. *Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей.* Ташкент: Munis desigin grour, 2014. 240 с.
2. Wang R. H., Wang L., Wang Z. Ch. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // *J. Math. Anal. Appl*, 2018. vol. 467, no. 2. pp. 1233–1257. doi: 10.16/j.jmaa.2018.07.065.
3. Turaev R. N. Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection // *Uzbek.Mat.Journal*, 2019. vol. 1, no. 1. pp. 156–166. doi: 10.29229/uzmj:2019-1-17.

Nonlinear Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection

R. N. Turaev

Institute of mathematics,
81, Mirzo Ulugbek st.,Tashkent, 10041, Uzbekistan.

Abstract

In this paper, we study a nonlocal problem with a free boundary of the Florin type for a quasilinear parabolic equation with nonlinear convection. A priori estimates of the Schauder type are established. Based on established assessments, the behavior of the free boundary in the considered the span of time proves the uniqueness of the solution initial problem. At the end the existence is proved solving the obtained and initial problem using the method fixed point Schauder.

Keywords: Nonlocal Florin problem, diffusion equation, Schauder type a priori estimates, nonlinear convection, principle extremum, existence and uniqueness of the solution.

Please cite this article in press as:
Turaev, R. N. Nonlinear Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 94–96 (In Russian).

Author's Details:

Rasul N.Turaev ✉ Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor, Senior Researcher; Lab. of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems; e-mail: rasul.turaev@mail.ru

Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа

К. У. Хубиев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Аннотация

В работе исследуется нелокальная внутреннекраевая задача с условиями Бицадзе-Самарского в параболической части области для нагруженного модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, нелокальная задача, задача Бицадзе—Самарского, внутренне-краевая задача.

Введение. Рассмотрим нагруженное [1] модельное уравнение гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x_1, y) = f_1(x, y), \quad y > 0, \\ u_x + u_y + cu + \lambda_2 u(x_2, y) = f_2(x, y), \ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $x = r$, $y = T > 0$ при $y > 0$, характеристиками $x - y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) и отрезком прямой $y = x_2 - r$ при $y < 0$; $x_1 \in [0, r]$, $x_2 \in [0, r[$; λ_i, c — заданные постоянные, $f_i(x, y)$ — заданные функции, $i = 1, 2$.

Краевые задачи для модельных нагруженных уравнений смешанных типов с нагруженным слагаемым $\lambda u(x, 0)$ и вырождением порядка в области его гиперболичности как в ограниченной, так и в неограниченной областях исследованы в монографии [1, с. 159, с. 176]. В работе [2] для однородного уравнения (1) в области Ω исследована локальная краевая задача с условиями на боковых частях границы в параболической части области.

1. Постановка задачи. Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через J- интервал $0 < x < r$ прямой $y = 0$.

Определение. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2_x(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Образец для цитирования
Хубиев К. У. Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 97–99.

Сведения об авторе
Хубиев Казбек Узеирович http://orcid.org/0000-0003-0081-0276
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел уравнений смешанного типа; e-mail: khubiev_math@mail.ru

Для уравнения (1) исследуется следующая

Задача BS. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0,y)=\varphi_0(y), \quad 0\leqslant y\leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x_0,y)=\alpha(y)u(r,y)+\beta(y), \quad 0<x_0<r, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ — заданные функции, $\alpha(y)\neq 0$.

Замечание 1. Заметим, что если $x_0=0$ при $\alpha(y)\neq 0$ или $x_0=r$ при $\alpha(y)\neq 1$ задача (2), (3) переходит в локальную краевую задачу, которая для уравнения (1) исследована в [2]. Если же при этом не выполнены указанные условия относительно $\alpha(y)$, то задача становится некорректной.

Для параболического уравнения задача Бицадзе—Самарского с нелокальным условием (3) была исследована в работе [3]. В работе [4] исследуются различные локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического типа, и в том числе рассмотрена задача для модельного параболического уравнения с условиями, обобщающими условия (3), и ее практические приложения. В [5] для уравнения эллиптического типа общего вида рассмотрена нелокальная задача с условиями, обобщающими условие (3), на обеих боковых сторонах прямоугольной области. В работах [6, 7] соответственно для модельного и нагруженного уравнений смешанного гиперболо-параболического типа второго порядка исследована внутреннекраевая задача типа задачи Бицадзе—Самарского, содержащая в условии значения искомой функции и ее первой производной.

2. Основной результат. Для задачи BS справедлива следующая

Теорема. *Если $f_1(x,y)\in C\big(\bar\Omega_1\big)$ и удовлетворяет условию Гельдера по x, $\varphi_0(y)\in C[0,T]$, $\alpha(y)$, $\beta(y)\in C[0,T]\cap C^1]0,T[$, $f_2(x,y)\in C\big(\Omega_2\cup\bar J\big)$,*

$$\left(1-\frac{G_\xi(x_0,r)}{\alpha(0)}\right)\left(1+\lambda_1\int_0^r G(x_1,\xi)d\xi+\lambda_2\int_0^r G\big(x_2,\xi\big)d\xi\right)+$$
$$+\frac{1}{\alpha(0)}\left(\lambda_1 G_\xi\big(x_1,r\big)d\xi+\lambda_2 G_\xi\big(x_2,r\big)\right)\int_0^r G\big(x_0,\xi\big)d\xi\neq 0, \tag{4}$$

где

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\exp([\xi-x]/2)\,\mathrm{sh}(p\xi)\,\mathrm{sh}(p[x-r])}{p\,\mathrm{sh}(pr)}, & 0\leqslant\xi\leqslant x,\\[2ex] \dfrac{\exp([\xi-x]/2)\,\mathrm{sh}(px)\,\mathrm{sh}(p[\xi-r])}{p\,\mathrm{sh}(pr)}, & x\leqslant\xi\leqslant r;\end{cases}$$

$p=\sqrt{1-4c}/2$, $pr\neq\pi n$, $n=1,2,\ldots$, то задача (1)–(3) имеет, и притом, единственное решение.

Замечание 2. Из условия (4) легко получается условие $\alpha(0)\neq G_\xi(x_0,r)$, которое возникает при решении задачи BS для ненагруженного или характеристически нагруженного модельного уравнения вида (1).

Заключение. В работе найдены условия существования и единственности решения нелокальной внутреннекраевой задачи для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его

гиперболичности. В гиперболической части области решение задачи выписано в явном виде, в параболической — выписано представление решения.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения.* М.: Наука., 2012. 232 с.
2. Хубиев К. У. Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018. Т. 149. С. 113–117.
3. Напсо А. Ф. О задаче Бицадзе—Самарского для уравнения параболического типа // *Дифференц. уравнения*, 1977. Т. 13, № 4. С. 761–762.
4. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // *Дифференц. уравнения*, 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
5. Нахушева З. А. Об одной нелокальной эллиптической краевой задаче типа задачи Бицадзе—Самарского // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2013. Т. 15, № 1. С. 18–23.
6. Напсо А. Ф. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1. С. 185–186.
7. Хубиев К. У. Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2008. № 6(148). С. 23–25.

On a nonlocal problem for a loaded hyperbolic-parabolic equation

K. U. Khubiev

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, 89 A, Shortanov st., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The paper studies a non-local inner-boundary problem with Bitsadze-Samarskii conditions in the parabolic part of the domain for a loaded mixed hyperbolic-parabolic type model equation with degeneration of order in the area of its hyperbolicity. Existence and uniqueness theorem for a solution to the problem under investigation is proved.

Keywords: loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation, nonlocal problem, Bitsadze–Samarskii problem, internal boundary value problem.

Please cite this article in press as:
Khubiev K. U. On a nonlocal problem for a loaded hyperbolic-parabolic equation, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 97–99 (In Russian).

Author's Details:

Kazbek U. Khubiev http://orcid.org/0000-0003-0081-0276
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Mixed-Type Equations;
e-mail: khubiev_math@mail.ru

Смешанная краевая задача в ограниченной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана—Лиувилля

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

Аннотация

Исследуется смешанная краевая задача в ограниченной области для дифференциального уравнения параболического типа с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и частной производной дробного порядка по временной. Построена функция Грина и явное представление решения рассматриваемой задачи. Показано, что построенная функция Грина при частных значениях параметров совпадает с функцией Грина соответствующей смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: оператор Римана—Лиувилля, оператор Бесселя, функция Бесселя, функция Миттаг—Леффлера, функция Грина.

Введение. В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - D_{0y}^{\alpha} u(x, y) = 0, \tag{1}$$

где

$$B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

— оператор Бесселя [1], $|b| < 1$; D_{0y}^{α} — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ [2, с. 11], [3, с. 14].

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и такую, что $y^{1-\alpha} u \in C(\bar{\Omega})$, $B_x u$, $D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω.

1. Постановка задачи. Для уравнения (1) рассматривается следующая смешанная краевая задача в прямоугольной области Ω.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 < x < r, \tag{2}$$

Образец для цитирования
Хуштова Ф. Г. Смешанная краевая задача в ограниченной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана—Лиувилля / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 100–102.

Сведения об авторе
Фатима Гидовна Хуштова http://orcid.org/0000-0003-4088-3621
научный сотрудник; отдел дробного исчисления; e-mail: khushtova@yandex.ru

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y) = \nu_0(y), \quad u(r,y) = \tau_r(y), \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\nu_0(y)$ *и* $\tau_r(y)$ — *заданные функции.*

2. Вспомогательные сведения. Далее

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$$

— цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка ν [4, с. 132], [5, с. 95];

$$E_{\frac{1}{\rho}}(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho)}, \quad \rho > 0,$$

— функция типа Миттаг—Леффлера [6, с. 117].

Обозначим $\beta = (1-b)/2$,

$$G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta) = \frac{2}{r^2}\frac{x^\beta \xi^\beta}{(y-\eta)^{1-\alpha}} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{-\beta}\big(\lambda_m x\big) J_{-\beta}\big(\lambda_m \xi\big)}{J^2_{1-\beta}\big(\lambda_m r\big)} E_{\frac{1}{\alpha}}\big(-\lambda_m^2 (y-\eta)^\alpha;\alpha\big),$$

где λ_m — положительные корни уравнения $J_{-\beta}\big(\lambda_m r\big) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, занумерованные в порядке их возрастания.

Функция $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta)$ является функцией Грина задачи (2), (3) для уравнения (1). В случае, когда $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ ($b = 0$), в силу известных представлений [3, с. 142], [5, с. 118]

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \quad E_1(-z;1) = e^{-z},$$

она совпадает с функцией Грина соответствующей смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности $u_{xx}(x,y) - u_y(x,y) = 0$ [7, с. 182]:

$$G^{1,1/2}(x,\xi,y-\eta) = \frac{2}{r}\sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{(2m+1)\pi}{2r}x \cdot \cos\frac{(2m+1)\pi}{2r}\xi \cdot e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{4r^2}(y-\eta)}.$$

3. Основной результат. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\varphi(x) \in C[0,r]$, $y^{1-\alpha}\nu_0(y)$, $y^{1-\alpha}\tau_r(y) \in C[0,T]$ *и выполнено условие согласования* $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\tau_r(y) = \varphi(r)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1) — (3), *представимое в виде*

$$u(x,y) = \int_0^r \xi^{1-2\beta} G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^y G^{\alpha,\beta}(x,0,y-\eta)\nu_0(\eta)d\eta - \\ - r^{1-2\beta}\int_0^y G_\xi^{\alpha,\beta}(x,r,y-\eta)\tau_r(\eta)d\eta.$$

Заключение. В работе доказана теорема существования и единственности смешанной краевой задачи в прямоугольной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и частной производной Римана—Лиувилля по временной переменной.

Библиографический список

1. Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука. Физматлит, 1997. 208 с.
2. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
4. Лебедев Н. Н. *Специальные функции и их приложения.* М.: Физматлит, 1963. 359 с.
5. Кузнецов Д. С. *Специальные функции.* М.: Высшая школа, 1965. 248 с.
6. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука, 1966. 672 с.
7. Араманович И. Г., Левин В. И. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1969. 288 с.

The mixed boundary value problem in a bounded domain for a differential equation with the Bessel operator and the partial Riemann–Liouville derivative

F. G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 A, Shortanov st., Nalchik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The paper studies a mixed boundary value problem in a bounded domain for a parabolic differential equation involving the Bessel operator with respect to a spatial variable, and a fractional-order derivative with respect to time variable. The Green function and the solution explicit representation for the problem under consideration are constructed. It is shown that the constructed Green function for particular values of the parameters coincides with the Green function of the corresponding mixed boundary value problem for the heat equation.

Keywords: Riemann-Liouville operator, Bessel operator, Bessel function, Mittag–Leffler function, Green function.

Please cite this article in press as:
Khushtova F. G. The mixed boundary value problem in a bounded domain for a differential equation with the Bessel operator and the partial Riemann–Liouville derivative, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 100–102 (In Russian).

Author's Details:

Fatima G. Khushtova http://orcid.org/0000-0003-4088-3621
Researcher; Dep. of Fractional Calculus; e-mail: khushtova@yandex.ru

Об одной краевой задаче для эллиптической системы первого порядка

О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Институт инженерных и цифровых технологий,
Россия, 308015, Белгород, улица Победы, 85.

Аннотация

Рассматривается общая задача линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка. Используя специальную подстановку, исходная задача редуцируется к общей задаче линейного сопряжения для канонической эллиптической системы. Предполагая, что выполнены определенные условия на коэффициенты, правые части системы и правую часть краевого условия, применяя интегральное представление решений этой системы и опираясь на результаты классической теории сингулярных операторов, в работе установлен критерий фредгольмовости поставленной задачи, получена формула для индекса задачи.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача линейного сопряжения, индекс.

Введение. Решение задачи линейного сопряжения для обычных аналитических функций в скалярном случае для общей кусочно-гладкой линии Γ было получено в [1], а в матричном случае — в работах [2, 3]. Немного позже в [4] была рассмотрена задача линейного сопряжения теории аналитических функций в матричном случае для произвольной кусочно-гладкой линии, доказана ее фредгольмовость, построено семейство канонических функций и описано поведение этих решений в узлах линии. В данной работе исследуется общая задача линейного сопряжения для эллиптической системы с комплексными коэффициентами в случае простого контура в открытом множестве, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей.

1. Сведение эллиптической системы к каноническому виду. Пусть открытое множество $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ есть объединение двух областей — конечной D_1 и бесконечной D_2. При этом Γ — простой гладкий ориентируемый контур класса $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. В этой обрасти рассматривается эллиптическая система первого порядка

$$U_y(z) - AU_x(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где постоянная матрица $A \in C^{l\times l}$ не имеет вещественных собственных значений, $l \times l$ — матричные коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ комплексны и заданы вне Γ,

Образец для цитирования
Чернова О. В. Об одной краевой задаче для эллиптической системы первого порядка / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 103–105.

Сведения об авторе
Ольга Викторовна Чернова http://orcid.org/0000-0002-4175-5448
старший преподаватель; каф. дифференциальных уравнений;
e-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru

$F(z)$ — комплексная l — вектор-функция. Как показано в [5], применяя подходящую линейную подстановку, эту систему удается преобразовать к эквивалентной системе $\phi_y(z) - J\phi_x(z) + c(z)\phi(z) + b(z)\overline{\phi(z)} = F_0(z)$, с комплексными $l \times l$ — матричными коэффициентами $c(z)$, $d(z)$, заданными вне Γ, комплексной l — вектор-функцией $F_0(z)$ и постоянной матрицей $J \in C^{l\times l}$, собственные значения которой лежат в верхней полуплоскости.

2. Постановка задачи. Для системы (1) поставим задачу линейного сопряжения следующим краевым условием:

$$C_{11}U^+(t) - C_{12}U^-(t) + \overline{C_{21}U^+(t)} - \overline{C_{22}U^-(t)} = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

где $l \times l$ — матричные коэффициенты $C_{ij} \in C^\nu(\Gamma)$ и черта означает комплексное сопряжение. Введем в рассмотрение класс $C^\mu_\delta\big(\widehat{D}, \infty\big)$, $-1 < \delta < 0$, функций, заданных в D, который определяется условием принадлежности этих функций пространству $C^\mu\big(\overline{D}_1\big)$, $\mu < \nu$, и весовому пространству $C^\mu_\delta\big(\overline{D}_2, \infty\big)$, $-1 < \delta < 0$, обозначим $L_A = \partial/\partial y - A\partial/\partial x$. Предполагая, что

$$a(z), b(z) \in C^\mu_{\delta_0}\big(\widehat{D}, \infty\big); f(t) \in C^\mu(\Gamma), F \in C^\mu_{\delta-1}\big(\widehat{D}, \infty\big), \delta_0 < -1 < \delta < 0, \tag{3}$$

решения $U = \big(U_1, \ldots, U_l\big)$ задачи (1), (2) будем искать в классе $C^\mu_{A,\delta}\big(\widehat{D}, \infty\big)$, который явно определяется условиями $U \in C^\mu_\delta\big(\widehat{D}, \infty\big)$, $L_A U \in C^\mu_{\delta-1}\big(\widehat{D}, \infty\big)$. Фредгольмовость задачи (1), (2) понимается в смысле фредгольвости оператора ее краевого условия, который действует $C^\mu_{A,\delta}\big(\widehat{D}, \infty\big) \to C^\mu_{\delta-1}\big(\widehat{D}, \infty\big) \times C^\mu(\Gamma)$. Согласно [5] существуют $l \times l$-матрицы B и J блочной структуры

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j}$, $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$, $i, j = 1, 2$, $l = l_1 + l_2$, что имеет место равенство $B^{-1}AB = \widetilde{J}$, в котором $\widetilde{J} = \operatorname{diag}\big(J_1, \overline{J}_2\big)$. Рассмотрим блочную $2l \times 2l$ матрицу

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ G_{21} & \overline{G}_{12} \end{pmatrix}$$

где $l \times l$ — матрицы-функции $G_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, в обозначении (4) они имеют явный вид $G_{11} = \big(C_{11}B_1, \overline{C}_{21}B_2\big)$, $G_{12} = \big(C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2\big)$, $G_{21} = \big(C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2\big)$, $G_{22} = \big(C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2\big)$.

3. Критерий фредгольмовости.

Теорема. *Пусть открытое множество $D = D_1 \cup D_2$, простой гладкий контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $l \times l$ — матрицы-функции $C_{ij}(t) \in C^\nu(\Gamma)$, $i, j = 1, 2$, и выполнено (3). Тогда условие обратимости матрицы-функции $G(t)$ необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1), (2) в классе $C^\mu_{A,\delta}\big(\widehat{D}, \infty\big)$ и ее индекс дается формулой*

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_\Gamma,$$

где приращение $[\ ]_\Gamma$ *вдоль* Γ *берется в направлении, оставляющем область* D_1 *слева.*

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №1.7311.2017/8.9.) .

Библиографический список

1. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука, 1968. 513 с.
2. Векуа И. Н. *Системы сингулярных интегральных уравнений.* М.: Наука, 1970. 379 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций // *УМН*, 1988. Т. 7, № 4(50). С. 3–54.
4. Солдатов А. П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1979. Т. 43, № 1. С. 184–202.
5. Чернова О. В. Эллиптические системы первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // *Материалы III Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук»*, 2017. С. 109–112.

On certain boundary value problem for a first order elliptic system

O. V. Chernova

Belgorod National Research University,
Institute of Engineering and Digital Technologies,
85, Pobedy street, Belgorod, 308015, Russian Federation.

Abstract

The general linear conjugation problem for a first order elliptic system is considered. Using a special substitution, the original problem is reduced to the general linear conjugation problem for the canonical elliptic system. Assuming that certain conditions on the coefficients, the right parts of the system and the right part of the boundary condition are satisfied, applying the integral representation of the solutions of this system and relying on the results of the classical theory of singular operators, the Fredholm criterion of the problem is established and a formula for the problem index is obtained.

Keywords: Elliptic System, Linear Conjugation Problem, Index.

Please cite this article in press as:
Chernova O. V. On certain boundary value problem for a first order elliptic system, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 103–105 (In Russian).

Author's Details:
Olga V. Chernova http://orcid.org/0000-0002-4175-5448
Senior Lecturer; Dep. of Differential Equations; e-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru

Двухфазная задача со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений

А. Н. Элмуродов

Институт Математики имени В. И. Романовского,
Узбекистан, 100041, Ташкент, Улица Мирзо Улугбека, 81.

Аннотация

Рассматривается двухфазная задача со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений типа реакция-диффузия. Установлены априорные оценки, исследовано поведение неизвестной границы, доказана однозначная разрешимость задачи.

Ключевые слова: свободная граница, параболическое уравнение, априорные оценки.

Введение. Применительно к задачам нефтепромысловой механики-подземной гидрогазодинамики Л. С. Лейбензон поставил задачи о вытеснении нефти из пласта водой, о движении газа в пористой среде и др. Новые постановки задач в этой области касались движения газированной жидкости, использования нелинейного закона фильтрации, кинетических представлений при движении смесей; предложена схема движения нефти в порах с большим числом мелких трещин и др. [1].

Постановка задачи. Требуется найти функции $(s(t), v(x,t), u(x,t))$ в области $D = D_1 \bigcup D_2$, $D_1 = \{(x,t) : -l < x \leqslant s(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}, D_2 = \{(x,t) : s(t) \leqslant x < l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$d_1(u)u_t - u_{xx} + c_1 u_x = u(a_1 - b_1 u), \quad (t,x) \in D_1, \tag{1}$$
$$d_2(v)v_t - v_{xx} + c_2 v_x = v(a_2 - b_2 v), \quad (t,x) \in D_2, \tag{2}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad -l < x \leqslant 0, \tag{3}$$
$$v(x,0) = v_0(x), \quad 0 \leqslant x < l, \tag{4}$$
$$u_x(-l,t) = c_1 u(-l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$
$$v_x(l,t) = c_2 v(l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$
$$u(s(t),t) = v(s(t),t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$
$$\dot{s}(t) = -\alpha u_x(s(t),t) + \beta v_x(s(t),t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

где $x = s(t)$ — свободная (неизвестная) граница определяется вместе с $u\,(x,t)$, $v\,(x,t)$, α, β, a_i, b_i, c_i, $d_i (i = 1,2)$ — положительные постоянные.

Образец для цитирования
Элмуродов А. Н. Двухфазная задача со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 106–108.

Сведения об авторе
Алимардон Нуриддинович Элмуродов; аспирант; лаб. математического моделирования нелинейных систем; e-mail: elmurodov8111@mail.ru

I. Функции $d_i(\omega)$ удовлетворяют условиям: $d_i(\omega)$ — ограничены и $d_i(\omega) \geqslant d_0 > 0$ для произвольных

$$\omega(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t) \in D_1, \\ v(x,t), & (x,t) \in D_2, \end{cases}$$

и ограничены в замкнутом множестве аргумента, $d_i(\omega) \in C^{1+\alpha}$;

$$u_0(x) \in C^{2+\alpha}[-l,0], \quad u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad u_0(0) = 0, \quad -l \leqslant x \leqslant 0;$$
$$v_0(x) \in C^{2+\alpha}[0,l], \quad v_0(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad v_0(0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Априорные оценки. Установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи. При этом широко применяются принципы максимума и теоремы сравнений [2,3].

Теорема 1. *Пусть функции $(s(t), u(x,t), v(x,t))$ являются решением задачи (1)–(8) в областях $D_1 = \{(x,t) : 0 < t < T, -l < x < s(t)\}$, $D_2 = \{(x,t) : 0 < t < T, s(t) < x < l\}$ и существует постоянные N_1, N_2 такие, что*

$$N_1 \geqslant \max_x \left\{ -\frac{u_0(x)}{x}, \frac{a_1^2}{b_1 c_1} \right\}, \quad N_2 \geqslant \max_x \left\{ \frac{v_0(x)}{x}, \frac{a_2^2}{b_2} c_2 \right\},$$

$0 < u_0(x) \leqslant \frac{a_1}{b_1}$, $0 < v_0(x) \leqslant \frac{a_2}{b_2}$. *Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, независящие от T, для которых справедливы неравенства:*

$$0 < u(x,t) \leqslant M_1, \quad (x,t) \in D_1,$$
$$0 < v(x,t) \leqslant M_2, \quad (x,t) \in D_2,$$
$$0 < \dot{s}(t) \leqslant M_3, \quad D_1 \cup D_2.$$

Установим некоторые априорные оценки.

Введем преобразование, $\tau = t$, $y = \frac{2x \mp s(t) \pm l}{l \pm s(t)}$. Здесь и далее в отношении функциональных пространств и обозначения норм в них будем следовать обозначениям работы [4].

Введем обозначения: $Q^\delta = \{(y,\tau) : 0 < \delta \leqslant \tau \leqslant T, -1+\delta \leqslant y \leqslant 1-\delta\}$.

Теорема 2. *Пусть функция $v(x,t)$ непрерывна в Q^δ вместе с v_x и удовлетворяет условиям задачи (2), а также*

$$\frac{\left|q(v,v_x)\right|}{p(v)} \leqslant R(v_x^2+1), \quad R - \text{const} > 0.$$

Тогда $\left|v_x(x,t)\right| \leqslant M_4\big(M_2, R, d_0\big)$ в Q^δ. И если еще известно, что функция $v(x,t)$ обладает в Q^δ суммируемым с квадратом обобщенными производными v_{xx} и v_{tx}, то существует $M_4 = M_4\big(M_2, R, d_0\big)$, что $|v|_{1+\gamma}^{Q^\delta} \leqslant M_4$.

Теорема 2 доказывается аналогично работе [5].

Оценка старших производных устанавливаются при помощи результатов для линейных уравнений [4].

При определенных условиях доказано неравенство

$$s(t) < l.$$

Существование решения. Установленные выше априорные оценки позволяют доказать теоремы существования решения задач (1)–(8).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует в D решение $u(x,t) \in C^{2+\gamma}\left(\overline{D_1}\right)$, $v(x,t) \in C^{2+\gamma}\left(\overline{D_2}\right)$, $s(t) \in C^{1+\gamma}([0,T])$ задачи* (1)–(8).

При этом применяется принцип неподвижных точек.

Заключение. Установлены априорные оценки шаудерского типа. На основе установленных оценок изучен поведение свободной границы. Доказана однозначная разрешимость задачи (1)–(8).

Библиографический список

1. Огибалов М. П., Мирзаджанзаде А. Х. *Механика физических процессов.* М.: Ижевск, 2008. 368 с.
2. Pao V. C. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations.* New York: Plenum Press, 1992. 778 с.
3. Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // *Indian J*, 2019. March. pp. 95–112. doi: 10.1007/s13226-019-0309-8.
4. Кружков Н. С. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // *Тр. ММО*, 1967. Т. 16, № 1. С. 329–346.
5. Тахиров Ж. О. *Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей.* Ташкент: Munis desigin grour, 2014. 240 с.

Free boundaries problem for a quasilinear parabolic equation reaction-diffusion type

A. N. Elmurodov

Institute of Mathematics,
81, Mirzo Ulugbek st., Tashkent, 10041, Uzbekistan.

Abstract

A two-phase problem with a free boundary is considered for quasilinear parabolic reaction-diffusion equations. A priori estimates are established, the behavior of the free boundary is investigated, and the unique solvability of the problem is proved.

Keywords: free boundary, parabolic equation, a priori estimates.

Please cite this article in press as:
Elmurodov A. N. Free boundaries problem for a quasilinear parabolic equation reaction-diffusion type, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 106–108 (In Russian).

Authors' Details:

Alimardon N. Elmurodov; Senior Researcher; Lab. of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems; e-mail: elmurodov8111@mail.ru

Differential LG-Game with "Life–Line"

B. T. Samatov, M. A. Horilov, S. N. Inomiddinov

Namangan State University,
316, Uychi st., Namangan, 160119, Uzbekistan

Abstract

Among numerous examples considered in the book of R. Isaacs [1] the game with "Life–line" (problem 9.5.1) occupies a special place as an example of differential game with phase constrain. In the present we study this problem in the case when a liner constraint is imposed on the pursuer control class which is a generalization of integral as well as geometric constraints and only a geometric constraint is imposed on the evader control class.

Keywords: differential game, liner constraint, pursuit,evasion, strategy, parallel pursuit, domain of attainability, life line.

We consider when the objects P called the pursuer and E called the evader, move in accordance with the equations

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ and x_0, y_0 are the initial positions of the objects P and E. Here the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, and on this vector-function, we impose a constraint of the form

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leqslant L(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

admitting a change $L(t) = kt + \rho_0$ linear in the time t, where k is arbitrary and ρ_0 is a nonnegative number. Similarly, the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, and on this vector-function, we impose a geometric constraint of the form

$$|v(t)| \leqslant \beta \quad \text{for almost every} \quad t \geqslant 0 \tag{4}$$

where β is a nonnegative parametric number which means the maximal velocity of the evader. We called constraint (3) an L-constraint and denoted the class of

Please cite this article in press as:
Samatov B. T., Horilov M. A., Inomiddinov S. N. Differential LG-Game with "Life–Line", In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 109–111.

Authors' Details:

Bahrom T. Samatov; Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Differential Equation and Mathematical Physics; e-mail: samatov57@inbox.ru

M. A. Horilov; PhD Researcher; Dept. of Differential Equation and Mathematical Physics; e-mail: mhorilov86@mail.ru

S. N. Inomiddinov; PhD Researcher; Dept. of Differential Equation and Mathematical Physics; e-mail: s.inomiddinov@umail.uz

admissible controls, i.e., of all measurable functions satisfying an L-constraint by U_L and denoted the class of the admissible evader controls satisfying G-constraint (4) by V_G.

In the the Differential Game with "Life–line" Pursuer P aims to catch Evader E i.e. to realize the equality $x(t) = y(t)$ for some $t > 0$, while E stays in the zone $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{A}$. The aim of E is to reach the zone $\mathbf{A}$ before being caught by Pursuer or to keep the relation $x(t) \neq y(t)$ for all t, $t \geqslant 0$. Notice that $\mathbf{A}$ doesn't restrict motion of P.

The relation (1)–(4) with phase constrain $\mathbf{A}$, represent the mathematical description of the object called the simplest Differential Game with "Life–line" [2,3] (briefly the LG-game with "Life–line").

We call the triple (μ_0, k, β) a parametric state of the LG-game with "Life–line" and denote it by p, where $\mu_0 = \rho_0/|z_0|, z_0 = x_0 - y_0$. Then we find the following nonempty simply connected set of such states p:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{LG}} = \mathbf{P_1} \cup \mathbf{P_2} \cup \mathbf{P_3},$$

where

$$\mathbf{P_1} = \big\{p : \mu_0 \geqslant 0, k > \beta^2, \beta \geqslant 0\big\},$$
$$\mathbf{P_2} = \big\{p : \mu_0 > 2\beta, k = \beta^2, \beta \geqslant 0\big\},$$
$$\mathbf{P_3} = \big\{p : \mu_0 \geqslant 2\big(\beta + \sqrt{\beta^2 - k}\big), k < \beta^2, \beta \geqslant 0\big\}.$$

Definition 1. If $p \in \mathbf{P}_{\mathrm{LG}}$, in the LG-game, then by the Π_{LG}-strategy of the pursuer we mean the function

$$\mathbf{u}_{\mathrm{LG}}(v) = v - \lambda_{\mathrm{LG}}(v)\xi_0,$$

where

$$\lambda_{\mathrm{LG}}(v) = \mu_0/2 + \langle v, \xi_0\rangle + \sqrt{(\mu_0/2 + \langle v, \xi_0\rangle)^2 + k - |v|^2}, \quad \xi_0 = z_0/|z_0|.$$

Definition 2. If $p \in \mathbf{P}_{\mathrm{LG}}$, then we call the attainability domain in the LG-game with "Life–line" the set

$$W_{\mathrm{LG}}(0) = \{w : |w - x_0|^2 \geqslant |w - y_0|^2 k/\beta^2 + |w - y_0|\rho_0/\beta\}.$$

Theorem 1. If $p \in \mathbf{P}_{\mathrm{LG}}$ and $coW_{\mathrm{LG}}(0) \cap \mathbf{A} = \emptyset$ then the Π-strategy for the player P is winning on the interval $[0, T_{LG}]$ in the game with "Life–line", where

$$T_{\mathrm{LG}} = |z_0|/\lambda^*_{LG}$$

and

$$\lambda^*_{\mathrm{LG}} = \mu_0/2 - \beta + \sqrt{(\mu_0/2 - \beta)^2 + k - \beta^2}.$$

Theorem 2. If $p \in \mathbf{P}_{\mathrm{LG}}$ and $W_{\mathrm{LG}}(0) \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$, then there exists the constant control v^*, $|v^*| = \beta$ for E which is winning in the game with "Life–line".

Comment. If $\rho_0 = 0$ then the boundary $W_{\mathrm{LG}}(0)$ is the sphere of Apollonius; if $n = 2$ and $k = 0$ then the boundary $W_{\mathrm{LG}}(0)$ the curve is Cartesian's oval when $4\beta < \mu_0$ and the loop of Pascal's snail in the case $4\beta = \mu_0$.

References

1. Isaacs R. *Differential Games*. New York-London-Sydney, J. Wiley, 1965, 384 pp.
2. Petrosyan L. A. *The Differential Games of pursuit*. Russian, Leningrad: LSU, 1977, 224 pp.
3. Samatov B. T. On a Pursuit-Evasion Problem under a Linear Change of the Pursuer Resource, *Siberian Adv. Math.*, 2013, vol. 23(4), pp. 294–302.

Global existence of solution for a coupled quasilinear parabolic system

A. J. Takhirov

Institute of Mathematics,
81, M. Ulugbek str., Tashkent, 100125, Uzbekistan.

Abstract

This paper studies the global existence and uniqueness of classical solutions for a predator-prey model with nonlinear diffusion and prey-taxis. The global existence and uniqueness of classical solutions to this problem are proved by the contraction mapping principle, together with L^p estimates and Schauder estimates of parabolic equation.

Keywords: mathematical model, system of parabolic equations, global existence.

The classical chemotaxis model is used in mathematical biology to describe chemotaxis process, where certain bacteria move toward higher densities of a chemical substance emitted by themselves and which diffuse at the same time [1,2].

Let $u(x,t)$ and $v(x,t)$ represent the predator and prey population densities respectively and let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n (n = 1,2,3)$ with smooth boundary $\partial\Omega$ and outer unit norm ν. Denote $Q_T = \Omega\times(0,T)$ and $S_t = \partial\Omega\times(0,T)$, where $T > 0$ is a fixed time.

In this paper, we consider the initial-boundary problem for two coupled parabolic equations

$$\begin{gathered} u_t - \nabla\cdot(d_1(u)\nabla u) + \nabla\cdot(u\chi(u)\nabla v) = -au + bg(v)u, (x,t)\in Q_T, \\ v_t - d_2\Delta v = k(v) - g(v)u, (x,t)\in Q_T, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x\in\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial v} = 0 \text{ on } S_T, \end{gathered} \tag{1}$$

where $d_i (i = 1,2)$ are the diffusion rates of the predator and prey respectively, $-a(a > 0)$ is the natural exponential decay of the predator population, $g(v) = b_1 v/(1 + b_2 v)(b_i > 0)$ is the predator rate, b is the conversion rate from prey to predator, $k(v) = rv(1 - v)/K$ is the logistical growth rate of prey.

We assume that

1) $d_1(\xi) \geqslant d_{10} > 0$, $d(\xi) \in C^2([0,\infty])$, $d_2 > 0$ — const;
2) $\chi(u) \in C^1([0,\infty])$, $\chi(u) \equiv 0$ for $u \geqslant u_m$ and $\chi'(x)$ is Lipschitz continuous;

Please cite this article in press as:
Takhirov A. J. Global existence of solution for a coupled quasilinear parabolic system, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 112–113.

Author's Details:
Alisher J. Takhirov Jr. Researcher; Dept. of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems; e-mail: al.takhirov@gmail.com

3) $u_0(x) \geqslant 0$, $0 \leqslant v_0(x) \leqslant K$, $u_0(x)$, $v_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$;
4) $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$.

In this paper, we shall prove the existence and uniqueness of classical solutions to the problem (1) by technique developed in [3, 4].

The plan of this paper is as follows.

First, we are going to prove local existence of classical solution to the problem. Further, a priori estimates are established. On the basis of these estimates, the existence of a global solution to the problem is proved.

References

1. Ainseba B. E., Benhadmanee M., Noussair A. A reaction-diffusion system modeling predator-prey with prey-taxis, *Nonlinear Analysis: RWA*, 2008, vol. 9, pp. 2086-2105.
2. Keller E. F., Segel L.A. Initiation of slime mold aggregation views as an instability, *J. Theoret. Biol.*, 1970, vol. 26, no. 3, pp. 399–415.
3. Tao Y., Wang M. Global solution for a chemotactic-haptotactic model of cancer invasion, *Nonlinearity*, 2008, vol. 21, no. 3, pp. 2221-2238.
4. Tao Y. Global existence of classical solutions to a predator-prey model with nonlinear prey-taxis, *Nonlinear Analysis: RWA*, 2010, vol. 11, pp. 2056-2064.

On a free boundary problem for a Maxwell fluid

J. O. Takhirov, M. T. Umirkhanov

Institute of Mathematics,
81, M. Ulugbek str., Tashkent, 100125, Uzbekistan.

Abstract

This paper deals with a hyperbolic free boundary problem describing the pressure-driven channel flow of a Bingham-type fluid. The global existence and uniqueness of classical solutions to this problem are proved.

Keywords: mathematical model, channel flow, hyperbolic system.

This paper considers a mathematical model for the channel flow of rate-type fluid with stress threshold proposed recently by Fusi and Farina [1]. The general mathematical model is derived within the framework of the theory of natural configurations developed by Rajagopal and Srinivasa [2].

Fusi and Farina [3] studied the telegrapher's free boundary problem for the velocity field in the viscoelastic region.

In the present paper, the problem from [3] is reduced and investigated in the form of a problem for systems of first-order hyperbolic equations

$$\begin{cases} kT_t + \tau q_x = \tau\beta^2, \\ \tau q_t + q + kT_x = 0, \end{cases} \quad s(t) < x < l, t > 0,$$
$$T(x,0) = \varphi_1(x), \quad q(x,0) = \varphi_2(x), \quad s_0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$T(l,t) = 0, \quad T(s(t),t) = T_0, \quad t \geqslant 0, t \geqslant 0,$$
$$T_x(s(t),t) + \dot{s}T_t(s(t),t) = -\beta^2, \quad t > 0,$$
$$s(0) = s_0, \quad s_0 \in (0,l).$$

Introducing the Riemann invariants

$$T = \frac{u+v}{2}, \quad q = \frac{1}{2}\frac{k}{\tau}(u-v)$$

we obtain the problem

Please cite this article in press as:
Takhirov J. O., Umirkhanov M. T. On a free boundary problem for a Maxwell fluid, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 114–115.

Authors' Details:

Jozil O. Takhirov http://orcid.org/0000-0002-0023-5673
Doct. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems; e-mail: prof.takhirov@yahoo.com

Masudkhon T. Umirkhanov; Jr. Researcher; Dept. of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems; e-mail: masudxonumirxonov@mail.ru

$$\begin{gathered}\begin{cases} u_t + u_x + \frac{1}{2\tau}(u-v) = \beta^2, \\ v_t - v_x - \frac{1}{2\tau}(u-v) = \beta^2, \end{cases} \qquad s(t) < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \Phi_1(x), \quad v(x,0) = \Phi_2(x), \quad s_0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(l,t) + v(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(s(t),t) + v(s(t),t) = 2T_0, t \geqslant 0, \\ (u_x(s(t),t) - v_x(s(t),t))(1 - \dot{s}^2(t)) = -\beta^2, \quad t > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

The unique global solvability of the problem (1) is proved.

References

1. Fusi L., Farina A. Pressure-driven flow of a rate-type fluid with stress threshold in an infinite channel, *Int.J. Nonlinear Mechanics*, 2011, vol. 46, no. 8, pp. 991-1000.
2. Rajagopal K. R., Srinivasa A. R. A thermodynamics framework for rate type fluid models, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2000, vol. 88, no. 3, pp. 207-227.
3. Fusi L., Farina A. On the solution of a hyperbolic one-dimensional free boundary problem for a Maxwell fluid, *Advances in Math. Physics*, 2011, vol. 2011, pp. 1-26. doi: 10.1155/2011/606757.

Информационные технологии в математическом моделировании

Моделирование вероятностных характеристик случайного процесса на выходе апериодического звена

***Т. А. Аверина*[1,2], *И. М. Косачев*[3], *К. Н. Чугай*[4]**

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, проспект Лаврентьева, 6.
[2] Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.
[3] Военная академия Республики Беларусь, Беларусь, 220057, Минск, проспект Независимости, 220.
[4] НИИ Вооруженных Сил Республики Беларусь, Беларусь, 220103, Минск, ул. Славянского, 4/3.

Аннотация

Для апериодического звена записано стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича. Записаны точное решение уравнения и система обыкновенных дифференциальных уравнений на начальные и центральные моменты. Проведено сравнительное статистическое и аналитическое моделирование вероятностных характеристик случайного процесса на выходе апериодического звена.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), численные методы, апериодическое звено.

Введение. Функционирование большинства сложных технических систем происходит при воздействии различных случайных факторов. Процессы, протекающие в таких системах, являются стохастическими, а сами системы относятся к классу стохастических динамических систем. Примерами могут служить системы управления летательными аппаратами. В работе [1] рассмотрена структурная схема контура наведения телеуправляемой ЗУР в вертикальной плоскости. Для структурной схемы такой динамической системы по известным правилам [2] осуществляется составление соответствующей ей математической модели, заданной системой СДУ. В данной работе для сравнения статистического [3, 4] и аналитического [2] моделирования вероятностных характеристик случайного процесса на выходе апериодического звена будет исследована тестовая задача, учитывающая наличие помех.

1. Постановка задачи. Структурная схема апериодического звена представлена на рисунке, где $C(t)$ — входное неслучайное задающее воздействие;

Образец для цитирования
Аверина Т. А., Косачев И. М., Чугай К. Н. Моделирование вероятностных характеристик случайного процесса на выходе апериодического звена / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 118–122.

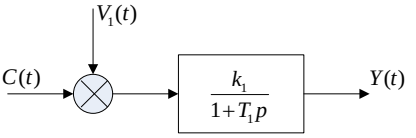
Сведения об авторах

Татьяна Александровна Аверина; кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; лаб. численного анализа СДУ; e-mail: ata@osmf.sscc.ru

Иван Михайлович Косачев; доктор технических наук, профессор; главный научный сотрудник; каф. радиолокации и приемопередающих устройств; e-mail: kosachev1301@mail.ru

Константин Николаевич Чугай; кандидат технических наук, доцент; старший научный сотрудник; каф. радиолокации; e-mail: konstantin.ch40@gmail.com

$V_1(t)$ — нормальный (гауссовый) белый шум со спектральной плотностью G_1; k_1 — коэффициент усиления и T_1 — постоянная времени апериодического звена.



Структурная схема апериодического звена

Стохастические дифференциальные уравнения, описывающие поведение систем, на вход которых действует нормальный белый шум, понимаются в симметризованном смысле. Поэтому, выходной сигнал $y(t)$ (рисунок) задан СДУ в смысле Стратоновича и имеет следующий вид:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1}y + \frac{k_1}{T_1}C(t) + \frac{k_1}{T_1}V_1, \quad y(0) = y_0.$$

Запишем это СДУ, заменив в нем гауссовый белый шум со спектральной плотностью G_1, на стандартный винеровский процесс $w(t)$:

$$\begin{gathered} dy(t) = (ay + b)dt + \sigma dw(t), \quad y(0) = y_0, \qquad a = -\frac{1}{T_1}, \\ b = \frac{k_1}{T_1}C(t), \qquad \sigma = \frac{k_1}{T_1}\sqrt{G_1}. \end{gathered} \tag{1}$$

Требуется вычислить вероятностные характеристики выходного процесса, если $C(t)$ — постоянная, линейная или квадратичная функция времени.

2. Аналитическое решение.

Лемма 1. *Точное решением СДУ (1) имеет вид:*

$$y(t) = e^{at}y_0 + e^{at}\left(\int_0^t e^{-a\tau}b(\tau)d\tau + \sigma\int_0^t e^{-a\tau}dw(\tau)\right)$$

и является нормальным случайным процессом с математическим ожиданием и дисперсией

$$\mathrm{M}(t) = e^{at}\mathrm{M}(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}b(\tau)d\tau, \quad \mathrm{D}(t) = e^{2at}\mathrm{D}(0) - \frac{\sigma^2}{2a}\big(1 - e^{2at}\big), \tag{2}$$

где $\mathrm{M}(t) = \mathrm{E}y(t)$, $\mathrm{D}(t) = \mathrm{E}\big(y(t) - \mathrm{M}(t)\big)^2$ *и* $\mathrm{E}\xi$ *обозначает математическое ожидание случайной величины* ξ.

Из уравнений (2) видно, что дисперсия не зависит от функции $b(t)$, а математическое ожидание зависит и при

$$b(t) = \frac{k_1}{T_1}\big(c_2t^2 + c_1t + c_0\big)$$

математическое ожидание имеет вид

$$\mathrm{M}(t) = e^{-\frac{t}{T_1}}\mathrm{M}(0) + k_1\Big[\big(1-e^{-\frac{t}{T_1}}\big)\big(c_0 - c_1T_1 + 2c_2T_1^2\big) + t(c_1 - 2c_2T_1) + c_2t^2\Big]. \quad (3)$$

Лемма 2. *Начальные* $\eta_s(t) = \mathrm{E}y^s(t)$ *и центральные* $\mu_s(t) = \mathrm{E}\big(y(t) - M(t)\big)^s$ *моменты s-го порядка решения СДУ* (1) *удовлетворяют ОДУ:*

$$\frac{d\eta_s(t)}{dt} = sa\eta_s + sb\eta_{s-1} + \frac{\sigma^2}{2}s(s-1)\eta_{s-2}, \quad \eta_s(0) = \mathrm{E}y_0^s, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad (4)$$

$$\frac{d\mu_s(t)}{dt} = sa\mu_s + \frac{\sigma^2}{2}s(s-1)\mu_{s-2}, \quad \mu_s(0) = E\big(y_0 - Ey_0\big)^s, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad (5)$$

точное решение которых имеет вид:

$$\eta_s(t) = e^{sat}\eta_s(0) + e^{sat}\left(\int_0^t e^{-sa\tau}\Big(sb(\tau)\eta_{s-1}(\tau) + \frac{s(s-1)\sigma^2}{2}\eta_{s-2}(\tau)\Big)\,d\tau, \quad (6)$$

$$\mu_s(t) = e^{sat}\mu_s(0) + \frac{s(s-1)\sigma^2}{2}\int_0^t e^{sa(t-\tau)}\mu_{s-2}(\tau)d\tau. \quad (7)$$

Из вида математического ожидания (3) следует

Лемма 3. *При* $a < 0$ *стационарное решение СДУ* (1) *существует только для постоянной функции* $b(t) = \frac{k_1c_0}{T_1}$ *и является нормальным случайным процессом с математическим ожиданием и дисперсией*

$$\mathrm{M} = k_1c_0, \quad \mathrm{D} = \frac{k_1^2G_1}{2T_1},$$

центральными моментами $\mu_s(t) = \mathrm{E}\big(y(t) - M(t)\big)^s$:

$$\mu_{2s+1} = 0, \quad \mu_{2s} = \mathrm{D}^s(2s-1)!!, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

и корреляционной функцией $R(t, t+\tau) = R(\tau) = \mathrm{D}e^{a|\tau|}$, *удовлетворяющей ОДУ*

$$\frac{dR(\tau)}{d\tau} = aR(\tau) \quad R(0) = \mathrm{D}.$$

Например, $\mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = 0$, $\mu_4 = 3\mathrm{D}^2$, $\mu_6 = 15\mathrm{D}^3$, $\mu_8 = 105\mathrm{D}^4$ и т.д.

3. Численные эксперименты. Точные значения моментов вычислялись по формулам (2), (3), (6), (7), а также классическим методом Рунге—Кутты 4-го порядка (RK4) при решении систем (4), (5). Для решения СДУ (1) использовался обобщенный метод типа Розенброка (ROS) [4], который на линейных системах СДУ с аддитивным шумом имеет второй порядок слабой сходимости ($p = 2$).

При численном решении СДУ кроме ошибки численного решения присутствует статистическая погрешность, поэтому шаг метода h и объем выборки N выбираются согласованно: $N \asymp \gamma^{-2}$, $h \asymp \gamma^{1/p}$, где γ — требуемая точность вычислений. В нашем случае $p = 2$, поэтому для достижения точности вычислений $\gamma = 10^{-2}$ требуется $N \asymp 10^4$, $h \asymp 0.1$, а для $\gamma = 10^{-3}$ требуется $N \asymp 10^6$, $h \asymp 0.03$.

Для оценки математического ожидания $\bar{\xi}_N = (\sum_{i=1}^{N} \xi_i)/N$ выполняется

$$P\Big(|\bar{\xi}_N - M| \leqslant \frac{\gamma(\varepsilon)\sqrt{\mathrm{D}}}{\sqrt{N}}\Big) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma(\varepsilon)}^{\gamma(\varepsilon)} e^{-z^2/2}\, dz = 1 - \varepsilon,$$

$\mathrm{M} = \mathrm{E}\xi$, $\mathrm{D} = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2$. Обычно задается $\varepsilon = 0.003$, для которого $\gamma(\varepsilon) \approx 3$.

Отметим особенности решения СДУ (1):

1) если плотность вероятности начального значения $y(0)$ задается равной стационарной, то решение СДУ (1) является стационарным на всем интервале интегрирования;
2) если $y(0)$ задано произвольно, то $y(t)$ будет стационарным после некоторого переходного участка;
3) параметр T_1 определяет время корреляции процесса $y(t)$: $\tau_k \asymp T_1$, поэтому для выхода на стационар требуется рассматривать интервал $[0, T]$, где $T > T_1$;
4) физическая постановка задачи рекомендует $T \geqslant 7T_1$.

Оценка вероятностных моментов

метод	N	h	M	D	μ_3	t_{ch}
точные (2)	—	—	5	0.5	0	—
RK4	—	0.1	5	0.5	0	0.0
RK4	—	0.05	5	0.5	0	0.0
ROZ	10^3	0.1	4.96908	0.32235	−0.07226	0.06
ROZ	10^3	0.01	4.98577	0.41870	0.0312	0.61
ROZ	10^4	0.1	4.99637	0.47372	0.0041	0.61
ROZ	10^4	0.01	5.00265	0.50708	0.0051	5.99
ROZ	10^6	0.05	4.99966	0.49872	0.0004	121.43

В таблице для $T = 10$ приведены точные значения моментов (M, D, μ_3), оценки методом RK4 (для разных h) и методом ROZ (для разных h и N), а также время счета t_{ch} (в секундах). Параметры модели:

$$T_1 = 1, \quad k_1 = 1, \quad C = 5, \quad G_1 = 1, \quad y(0) = 5, \quad t \in [0, 10].$$

Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические результаты. Для расчетов использовался ПК с процессором Intel Core i5 3330 (3.00 ГГц). Для моделирования равномерно распределенных случайных величин на интервале $(0, 1)$ использовался «генератор» псевдослучайных чисел RAND [5] (с модулем 2^{40} и множителем 5^{17}).

Заключение. По результатам сравнения численного и аналитического решения СДУ (1) можно сделать следующие выводы:

1) при расчетах обоими методами нужно одинаково задавать начальные условия;
2) задача (1) не всегда имеет стационарное решение;
3) в случае существования стационарного решения, вероятностные характеристики нужно оценивать при $T > T_1$.

Благодарность. Работа выполнена в рамках госзадания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315-2016-0002) .

Библиографический список

1. Косачев И. М., Чугай К. Н. Имитационное математическое моделирование контура наведения зенитной телеуправляемой ракеты зенитного ракетного комплекса с комплексированной информационной системой // *Вестн. Воен. Акад. Респ. Беларусь*, 2017. № 4 (57). С. 25–32.
2. Косачев И. М., Ерошенков М. Г. *Аналитическое моделирование стохастических систем.* Минск: Наука и техника, 1993. 264 с.
3. Аверина Т. А. Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // *Сиб. ЖВМ*, 2002. Т. 5, № 1. С. 1–10.
4. Аверина Т. А. Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // *Вестник Бурятского гос. университета*, 2012. № 9. С. 91–94.
5. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. *Статистическое моделирование.* М.: Наука, 1982. 296 с.

Simulation of probabilistic characteristics of a random process at the output of an aperiodic block

***T. A. Averina*[1,2], *I. M. Kosachev*[3], *K. N. Chugai*[4]**

[1] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
6, prospekt Lavrentieva, Novosibirsk, 630090, Russian Federation.
[2] Novosibirsk State University,
2, Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.
[3] Military Academy of the Republic of Belarus,
220, prospekt Nezavisimosti, Minsk, 220057, Republic of Belarus.
[4] Research Institute of the Armed Forces of the Republic of Belarus,
4/3, Slavyanskogo st., Minsk, 220103, Republic of Belarus.

Abstract

Based on the aperiodic block diagram, a stochastic differential equation in the sense of Stratonovich is obtained. An exact solution of the equation and a system of ordinary differential equations for the initial and central moments are obtained. Comparative statistical and analytical modeling of probabilistic characteristics of a random process at the output of an aperiodic block wera carried out.

Keywords: stochastic differential equation (SDE), numerical methods, aperiodic block.

Please cite this article in press as:
Averina T. A., Kosachev I. M., Chugai K. N. Simulation of probabilistic characteristics of a random process at the output of an aperiodic block, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 118–122 (In Russian).

Authors' Details:

Tatyana A. Averina; Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Lab. of Numerical Analysis of SDEs; e-mail: ata@osmf.sscc.ru

Ivan M. Kosachev; Dr. Tech. Sci., Professor; Chief Researcher; Dept. Radar and Transceiver Devices; e-mail: uriy.2011@list.ru

Konstantin N. Chugai; Cand. Tech. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Dept. Radar; e-mail: konstantin.ch40@gmail.com

Среднеквадратичное оценивание параметров логистических функций

Е. А. Афанасьева, В. Е. Зотеев

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассматривается новый численный метод оценки параметров логистических функций. В основе разработанного алгоритма лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов обобщенной регрессионной модели, построенной на основе разностных уравнений, которые описывают результаты наблюдений. Применение численного метода показано на примере функции Верхлуста.

Ключевые слова: нелинейная математическая модель, регрессионный анализ, система разностных уравнений, обобщенная регрессионная модель, среднеквадратичное оценивание.

Введение. При построении математических моделей различных динамических процессов в биологии, химии, физике и экономике широкое распространение получили логистические функции. Одной из основных проблем при моделировании является нахождение достоверной оценки параметров логист по данным, полученным в результате наблюдений. Эта задача может быть решена с использованием известных методов нелинейного оценивания [1]. Однако при большом разбросе эксперементальных данных относительно построенной модели известные подходы не позволяют получить необходимую точность вычислений. В данной работе эта проблема решается с помощью среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели, описывающей результаты наблюдений.

Алгоритм численного метода. Рассмотрим алгоритм численного метода среднеквадратичного оценвания параметров логистических функций на примере функции Верхлуста, которая описывается следующим соотношением:

$$y\,(t) = \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha t}}, \tag{1}$$

где A_0, A_1, α — параметры, оценки которых необходимо найти, основываясь на данных наблюдений. В соответствии с подходом, представленном в [2], по-

Образец для цитирования
Афанасьева Е. А., Зотеев В. Е. Среднеквадратичное оценивание параметров логистических функций / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 123–126.

Сведения об авторах
Елена Андреевна Афанасьева http://orcid.org/0000-0001-7815-2723
магистрант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: elenaafa6277@gmail.com
Владимир Евгеньевич Зотеев http://orcid.org/0000-0001-7114-4894
доктор технических наук, доцент; профессор каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev-ve@mail.ru

лучено разностное уравнение, которое связывает два последовательных значения функции $\hat{y}_k = \dfrac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha\tau k}}$, где τ — период дискретизации,

$$\hat{y}_{k-1}\hat{y}_k = \mu_1\hat{y}_k + \mu_2\hat{y}_{k-1},\ i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{2}$$

где $\mu_1 = \dfrac{A_0}{1 - e^{\alpha\tau}}$, $\mu_2 = -\mu_1 e^{\alpha\tau}$.

С учетом естественного разброса данных ε_k в результатах наблюдений $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, где N — объем выборки результатов наблюдений, на основе соотношения (2) построена система линейных разностных уравнений, описывающая результаты наблюдений:

$$\begin{cases} y_0 = \mu_3 + \varepsilon_0; \\ y_k y_{k-1} = \mu_1 y_k + \mu_2 y_{k-1} + \eta_k; \\ \eta_k = \varepsilon_{k-1}\left(y_k - \mu_2\right) + \varepsilon_k\left(y_{k-1} - \mu_1\right),\ k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{3}$$

Коэффициенты системы уравнений (3) связаны с параметрами функции Верхлуста (1) следующими соотношениями:

$$\mu_1 = \frac{A_0}{1 - e^{\alpha\tau}},\ \mu_2 = -\mu_1 e^{\alpha\tau},\ \mu_3 = \frac{A_0}{1 + A_1}. \tag{4}$$

Среднеквадратичные оценки коэффициентов системы разностных уравнений (3) находятся из условия минимизации функционала

$$\|\varepsilon\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=o}^{N-1}\left(y - \hat{y}_k\right)^2 \Rightarrow \min.$$

В матричной форме записи система (3) может быть представлена в виде обобщенной регрессионной модели

$$\begin{cases} b = F\mu + \eta, \\ \eta = P_\mu \varepsilon. \end{cases} \tag{5}$$

Элементы модели (5) формируются на основе данных наблюдений y_k. В частности, матрица P_μ линейного преобразования вектора стохастической компоненты ε формируется следующим образом: $p_{11} = 1,\ p_{ii} = y_{i-2} - \mu_1$, $p_{ii-1} = y_{i-1} - \mu_2$, $i = \overline{2, N}$, остальные элементы матрицы равны нулю. Модель (5) можно преобразовать к виду $P_\mu^{-1} b = P_\mu^{-1} F\mu + \varepsilon$, тогда условие минимизации среднеквадратичного отклонения модели от результатов наблюдений сводится к условию минимизации функционала

$$\|\varepsilon\|^2 = \|P_\mu^{-1} b - P_\mu^{-1} F\hat{\mu}\|^2 \Rightarrow \min.$$

При условии вычисления матрицы $P_{\hat{\mu}}$ в точке $\hat{\mu}^{(i)}$ решение задачи минимизации приводит к системе нормальных уравнений

$$F^T \Omega_{\hat{\mu}^{(i)}}^{-1} F\mu = F^T \Omega_{\hat{\mu}^{(i)}}^{-1} b, \tag{6}$$

где

$$\Omega_{\hat{\mu}^{(i)}} = P_{\hat{\mu}^{(i)}} P^T_{\hat{\mu}^{(i)}}.$$

На основе формулы (6) формируется итерационная процедура уточнения коэффициентов обобщенной регрессионной модели $\hat{\mu}^{(i)}$:

$$\hat{\mu}^{(i+1)} = \left[F^T \Omega^{-1}_{\hat{\mu}^{(i)}} F\right]^{-1} F^T \Omega_{\hat{\mu}^{(i)}} b,$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации. Начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat{\mu}^{(0)}$ можно найти из условия минимизации невязки следующим соотношением $\hat{\mu}^{(0)} = \left(F^T F\right)^{-1} F^T b$.

Найденные среднеквадратичные оценки коэффициентов разностных уравнений используются для нахождения оценок параметров функции Верхулста (1). Из (4) можно получить следующие соотношения:

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{\tau} \ln\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right), \; \hat{A}_0 = \mu_1 + \mu_2, \; \hat{A}_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_3} - 1.$$

Апробация численного метода. Для апробации численного метода был сделан прогноз числа мобильных телефонов на 1 тысячу человек взрослого населения в РФ. Выборка данных была взята из социологических опросов Левада-Центр (http://www.levada.ru/) за период с 2000 по 2007 год. Для моделирования использовалась функция Верхлуста; задача нелинейной регрессии решалась тремя методами: методом Ньютона, методом логарифмирования и разработанным численным методом. Был сделан прогноз роста этого показателя на 2018 год и получены следующие результаты: с использованием метода Ньютона — 910 мобильных телефонов на 1 тыс. человек, с использованием метода на основе логарифмирования — 890 мобильных телефонов на 1 тыс. человек, на основе разработанного численного метода — 930 мобильных телефонов на 1 тыс. человек, по данным опроса Левада-Центр — 970 телефонов на 1 тысячу человек. Из полученных результатов видно, что прогноз, полученный разработанным численным методом наиболее близок к статистическим данным. Погрешность прогноза составляет 4,1%.

Выводы. Таким образом, в данной работе был представлен новый численный метод среднеквадратичного оценивания параметров логистических функций на основе разностных уравнений, приведены формулы, позволяющие найти оценки параметров логистической функции через коэффициенты разностных уравнений. Разработанный метод был апробирован, сравнение полученного результата со статистическими данными показало его состоятельность.

Библиографический список

1. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регресии.* М.: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
2. Зотеев В. Е. *Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / Под ред. Радченко В.П.* М.: Машиностроение, 2009. 344 с.

RMS estimation of logistic functions parameters

E. A. Afanasyeva, V. E. Zoteev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A new numerical method for estimating the parameters of logistic functions is considered. The developed algorithm is based on RMS estimates of coefficients of generalized regression models based on difference equations describing the results of the experiment. The use of a numerical parameter is shown on the example of the Verkhlust function.

Keywords: nonlinear mathematical model, regression analysis, system of difference equations, generalized regression model, RMS estimation.

Please cite this article in press as:
Afanasyeva E. A., Zoteev V. E. RMS estimation of logistic functions parameters, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 123–126 (In Russian).

Authors' Details:

Elena A. Afanasyeva http://orcid.org/0000-0001-7815-2723
Graduate Student; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: elenaafa6277@gmail.com

Vladimir E. Zoteev http://orcid.org/0000-0001-7114-4894
Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Методы расчета координат фигуративных точек в многомерных фазовых диаграммах и реализация в MO Excel

А. В. Бурчаков

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

В настоящей работе приведены результаты исследования вопроса, касающегося расчета координат (x_i, y_i, z_i) для некоторой гипотетической фигуративной точки i в многомерной фазовой диаграмме. Выведены уравнения пересчета координат в декартовые координаты в виде матриц, методика реализована в программе MO Excel, построение 3D модели фазового комплекса выполнено в программе КОМПАС-3D.

Ключевые слова: барицентрические координаты, декартовые координаты, фазовая диаграмма, фигуративная точка, многокомпонентная система, КОМПАС-3D.

Введение. В последние годы в области физико-химического анализа многокомпонентных систем (МКС) актуальным становится вопрос изображения (представления) фазовых диаграмм с помощью компьютерных технологий. Информационные технологии (IT) позволяют реализовать многие идеи представления и анализа многомерных фазовых диаграмм за счет визуализации трехмерного пространства, тем самым имеется возможность задействовать еще одну переменную — ось z. Кроме этого, IT способны обрабатывать большие массивы данных с минимальными погрешностями вычислений. Применение грамотной математической модели в компьютерных технологиях позволяет проводить достаточно точные прогнозы фазовых равновесий для заданного набора термодинамических параметров системы (прежде всего это температура, давление и состав смеси) [1,2]. Одним из методов прогнозирования фазовых равновесий в МКС является анализ компьютерной 3D модели, построенной в программе-редакторе трехмерной векторной графики [3–5].

Исходя из позиций физико-химического анализа многокомпонентных конденсированных систем, фигуративная точка на диаграмме задается параметрами — состав и температура. Состав точки — концентрации компонентов — представляют собой барицентрические координаты, а температура может задаваться как ордината z в модели фазовой диаграммы [5].

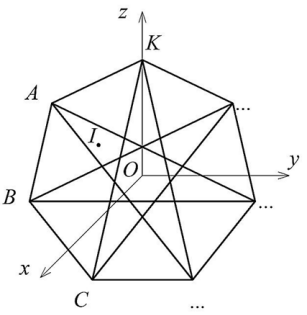
Образец для цитирования
Бурчаков А. В. Методы расчета координат фигуративных точек в многомерных фазовых диаграммах и реализация в MO Excel / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 127–129.

Сведения об авторе
Александр Владимирович Бурчаков http://orcid.org/0000-0002-3202-3405
кандидат химических наук, доцент; старший научный сотрудник; каф. общей неорганической химии; e-mail: turnik27@yandex.ru

Многомерная фазовая диаграмма МКС имеет барицентрическую и (или) смешанную (барицентрическую и декартовую) систему координат. Программа трехмерной векторной графики использует чаще всего декартовую ортогональную систему координат. Для построения модели фазовой диаграммы необходимо выполнить пересчет координат точек из барицентрической в декартовую. Для этих целей удобно использовать алгебру матриц. Для пересчета координат из барицентрических в декартовые используют следующее матричное соотношение:

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i & k_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k & y_k & z_k \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \end{pmatrix}$ — матрица декартовых координат некоторой фигуративной точки i в модели фазовой диаграммы (рисунок); $\begin{pmatrix} a_i & b_i & k_i \end{pmatrix}$ — матрица барицентрических координат некоторой фигуративной точки i в фазовой диаграмме; $\begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k & y_k & z_k \end{pmatrix}$ — матрица преобразования координат, которая представляет собой записанные в строчки декартовые координаты вершин полиэдра составов $ABC\dots K$ (многокомпонентной системы — вершин симплекса, определяющих барицентрические координаты точки (точечных базиса) — см. рисунок [5].



Полиэдр составов ABC…K и внедренная x- y-z декартовая система координат

Выводы.

1. Обозначена проблема расчета (x, y, z) — координат для фигуративной точки многомерной фазовой диаграммы с целью дальнейшего построения модели многокомпонентной системы.

2. Выведено общее уравнение для пересчета координат из барицентрических в декартовые для некоторой фигуративной точки i, представленной в матричной форме.

3. Для фазовых диаграмм типа треугольник составов, квадрат составов, T-x-y фазовая диаграмма тройной системы, концентрационный тетраэдр четверной системы выведены уравнения пересчета координат в декартовые координаты.

4. Разработан алгоритм автоматизированного пересчета координат в программе MO Excel и построения точек в программе КОМПАС 3D.

Благодарность. Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Самарского государственного технического университета.

Проект № 4.5534.2017/БЧ.

Библиографический список

1. Nipan G.D. p–T–x–y phase diagram of the Cd–Zn–Te system. // *Journal of Alloys and Compounds.*, 2004. no. 1–2. pp. 160–163. doi: 10.1016/j.jallcom.2003.08.107.
2. Bertrand Cheynet, Catherine Bonnet, Milan Stankov. GEMINI — DiagPlot: 2D & 3D ternary phase diagrams. // *CALPHAD: Computer Coupling of Phase Diagrams and Thermochemistry*, 2009. vol. 33, no. 2. pp. 312–316. doi: 10.1016/j.calphad.2008.09.007.
3. Burchakov A.V., Egorova E. M.,Kondratyuk I. M.,Moshchenskii Yu. V. Phase Equiilibria in the System LiF-KI-KF-K2CrO4. // *Russian Journal of Inorganic Chemistry*, 2018. vol. 63, no. 7. pp. 950–961.
4. Garkushin I. K., Burchakov A. V. Emel'yanova U. A. Calculation of the Phase Diagram of the NaCl–RaCl2 System by Analyzing the NaCl–MCl2 Systems (M = Ca, Sr, Ba) Using the Schröder–Le Châtelier Equation. // *Russian Journal of Inorganic Chemistry*, 2019. vol. 64, no. 3. pp. 389–392.
5. Гаркушин И. К., Дворянова Е. М., Бурчаков А. В. *Моделирование фазовых систем и фазовых равновесий: учебное пособие в 2-х частях.*: Ч. 1. Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2015. 176 с.

Calculation methods the coordinates of figurative points in multidimensional phase diagrams and implementation in MO Excel

A. V. Burchakov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

This paper presents the results of the study of the issue of calculating the coordinates $(x_i, y_i, z_i$ for a certain hypothetical figurative point i in a multidimensional phase diagram. Equations for converting coordinates to Cartesian coordinates in the form of matrices are derived. The technique is implemented in the MO Excel program. The construction of the 3D model of the phase complex was performed in the program KOMPAS-3D.

Keywords: barycentric coordinates, Cartesian coordinates, phase diagram, figurative point, multicomponent system, KOMPAS-3D.

Please cite this article in press as:
Burchakov A. V. Calculation methods the coordinates of figurative points in multidimensional phase diagrams and implementation in MO Excel, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 127–129 (In Russian).

Author's Details:

Alexander V. Burchakov http://orcid.org/0000-0002-3202-3405
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Lab. of Elasticity and Plasticity; e-mail: turnik27@yandex.ru

Расчет материального баланса кристаллизующихся фаз в пятикомпонентной взаимной системе Li,Na,K||F,Cl,Br в программной среде MO Excel

У. А. Емельянова, А. В. Бурчаков, И. К. Гаркушин

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

В работе реализован метод расчета материального баланса кристаллизующихся фаз в пятикомпонентной взаимной системе Li,Na,K||F,Cl,Br, основанный на мольном балансе компонентов системы. Расчет проведен в программе MO Excel. Созданный алгоритм позволяет автоматизированно рассчитывать количество кристаллизующихся фаз, а также выявлять химические реакции, протекающие в системе для смеси с соотношением компонентов, заданных пользователем. Уникальность метода заключается в возможности применения его для систем любой мерности.

Ключевые слова: пятикомпонентная взаимная система, фазовые равновесия, древо фаз, материальный баланс, непрерывные ряды твердых растворов, MO Excel.

Введение. Вопрос прогнозирования кристаллизующихся фаз в многокомпонентных системах взаимного и невзаимного типов с образованием двойных, тройных соединений, занимает ученых в области физико-химического анализа давно и является актуальным и сегодня [1]. На первом этапе изучения фазовых равновесий в пятикомпонентной взаимной системе Li,Na,K||F,Cl,Br проведен анализ систем — элементов огранения данной системы [2]. Далее выполнен прогноз кристаллизующихся фаз с помощью составления древа фаз. Одним из методов получения древа фаз является метод А. Г. Краевой, в основе которого лежит теория графов [3]. В каждом элементе древа фаз прогнозируется собственный набор стабильных кристаллизующихся фаз. Следующим этапом в работе явилось решение мольного баланса компонентов и кристаллизующихся фаз [4]. Имеется пять частных решений для каждого

Образец для цитирования
Емельянова У. А., Бурчаков А. В., Гаркушин И. К. Расчет материального баланса кристаллизующихся фаз в пятикомпонентной взаимной системе Li,Na,K||F,Cl,Br в программной среде MO Excel / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 130–132.

Сведения об авторах

Ульяна Александровна Емельянова аспирант; каф. общей и неорганической химии; e-mail: uliana_sergeeva@bk.ru

Александр Владимирович Бурчаков http://orcid.org/0000-0002-3202-3405 кандидат химических наук; преподаватель; каф. общей и неорганической химии; e-mail: turnik27@yandex.ru

Иван Кириллович Гаркушин; доктор химических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. общей и неорганической химии; e-mail: gik49@yandex.ru

стабильного элемента древа фаз. Здесь представлено лишь решение для одного элемента древа фаз — стабильного секущего тетраэдра LiF-NaF-KCl-KBr (таблица).

Материальный баланс кристаллизующихся фаз для некоторой смеси i системы Li,Na,K||F,Cl,Br

№, п/п	компоненты и фазы	M, г/моль	до реакций		после реакций	
			m, г	n, моль	n, моль	m, г
1	LiF	25.94	259.39	10	40	1037.58
2	NaF	41.99	1259.65	30	52	2183.38
3	KF	58.1	3021.03	52	0	0
4	LiCl	42.39	847.87	20	0	0
5	NaCl	58.44	584.42	10	0	0
6	KCl	74.55	1789.22	24	0	0
7	LiBr	86.85	868.45	10	0	0
8	NaBr	102.89	1234.73	12	0	0
9	KBr	119	2499.05	21	0	0
10	$LiCl_xBr_{1-x}$	62.1	-	-	0	0
11	$NaCl_xBr_{1-x}$	78.15	-	-	0	0
12	KCl_xBr_{1-x}	94.26	-	-	97	9142.85
	сумма		12363.81	189	189	12363.81

В таблице представлено решение материального баланса для некоторой смеси i пятикомпонентной системы Li,Na,K||F,Cl,Br. Для данной смеси выполняется следующее условие:

$$c_1 = d_1 + g_1 + e_1 + h_1, \tag{1}$$

где $c_1 = n(\mathrm{KF})$, $d_1 = n(\mathrm{LiCl})$, $g_1 = n(\mathrm{LiBr})$, $e_1 = n(\mathrm{NaCl})$, $h_1 = n(\mathrm{NaBr})$ — количества соответствующих веществ в исходной смеси i. Условие (1) указывает на то, что в результате сплавления компонентов и дальнейшей кристаллизации (осуществления реакции) в смеси i будут кристаллизоваться фазы, отвечающие стабильному тетраэдру LiF-NaF-KCl-KBr. В смеси i протекают следующие химические реакции:

10 моль KF + 10 моль NaCl = 10 моль NaF + 10 моль KCl,
20 моль KF + 20 моль LiCl = 20 моль KCl + 20 моль LiF,
54 моль KCl + 43 моль KBr = 97 моль $KCl_{0.56}$ $Br_{0.44}$,
12 моль KF + 12 моль NaBr = 12 моль NaF + 12 моль KB,
10 моль KF + 10 моль LiBr = 10 моль KBr + 10 моль LiF.

Выводы.

1. Проведено разбиение пятикомпонентной взаимной системы Li,Na,K||F, Cl,Br на стабильные симплексы с получением древа фаз. Спрогнозирован набор кристаллизующихся фаз.
2. Методом мольного баланса составлены алгебраические выражения, связывающие количества продуктов реакции (кристаллизующиеся фазы), количества веществ-участников реакции с исходными веществами.
3. Разработан алгоритм автоматизированного расчета материального баланса кристаллизующихся фаз и апробирован для некоторой смеси i. Расчет показал корректность вычислений материального баланса.

Благодарность. Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Самарского государственного технического университета.
Проект № 4.5534.2017/БЧ.

Библиографический список

1. Vasily I. Lutsyk, Vera P. Vorob'eva, Alexandr M. Zyryanov. Correction of T-x-y Diagrams for Lead-Free Solders / *16th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing* (2013, August 25-28, San Diego, California, USA). San Diego, California, USA, 2013. pp. 371–376.
2. Гаркушин И. К., Чугунова М. В., Милов С. Н. *Образование непрерывных рядов твердых растворов в тройных и многокомпонентных солевых системах.* Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
3. Посыпайко В. И., Алексеева Е. А., Первикова В. Н., Краева А. Г., Давыдова Л. С. Новый метод триангуляции (разбиения) диаграмм состава многокомпонентных взаимных систем с комплексными соединениями с применением теории графов // *Журн. неорган. химии*, 1973. Т. 17, № 11. С. 3051-3056.
4. Burchakov A.V., Dvoryanova E. M., Kondratyuk I. M. Stable Triangle (LiF)2-(KI)2-Li2CrO4 of the Quaternary Reciprocal System Li,K||F,I,CrO4 // *Russian Journal of Inorganic Chemistry*, 2016. vol. 61, no. 4. pp. 496–506.

Material balance calculation of crystallizing phases in the quinary reciprocal system Li,Na,K||F,Cl,Br

U. A. Emelyanova, A. V. Burchakov, I. K. Garkushin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In work the method of material balance calculation of crystallizing phases in the quinary reciprocal system Li,Na,K||F,Cl,Br based on the molar balance of the system components, is implemented. Calculation was carried out in the program MO Excel. The created algorithm allows to automatically calculate the quantity of crystallizing phases, as well as to identify chemical reactions occurring in the system for a mixture with a ratio of components specified by the user. The uniqueness of the method lies in the possibility of applying it to systems of any dimension.

Keywords: quinary reciprocal system, phase equilibria, phases tree, material balance, continuous series of solid solutions, MO Excel.

Please cite this article in press as:
Emelyanova A. V., Burchakov V. V., Garkushin V. V. Material balance calculation of crystallizing phases in the quinary reciprocal system Li,Na,K||F,Cl,Br, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 130–132 (In Russian).

Authors' Details:

Ulyana A. Emelyanova Postgraduate Student; Dept. of General and Inorganic Chemistry

Alexander V. Burchakov http://orcid.org/0000-0002-3202-3405
PhD Chem.; Senior Researcher; Dept. of General and Inorganic Chemistry;
e-mail: turnik27@yandex.ru

Ivan K. Garkushin; Dr. Chem., Professor; Head of the Department; Dept. of General and Inorganic Chemistry; e-mail: turnik27@yandex.ru

Применение метода разделения переменных при решении эволюционно-краевых задач для областей с криволинейными границами

В. Л. Леонтьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29.

Аннотация

Проводится обобщение метода разделения переменных, связанное с применением ортогональных финитных функций, на примере первой начально-краевой задачи для двумерной области с криволинейной границей. Формируемая последовательность конечных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи — бесконечному ряду Фурье. Аналогичное обобщение метода Фурье справедливо в рамках начально-краевых задач других типов, для областей более высокой размерности.

Ключевые слова: метод разделения переменных, метод Фурье, ортогональные финитные функции, конечные ряды, краевая задача, область с криволинейной границей.

Введение. Излагается алгоритм обобщенного метода Фурье, связанный с применением ортогональных финитных функций (ОФФ), на примере первой начально-краевой задачи для области с криволинейной границей. Показано, что последовательность конечных рядов Фурье в каждый момент времени сходится к точному решению задачи — бесконечному ряду Фурье. Структура конечных рядов Фурье аналогична структуре бесконечного ряда Фурье. При увеличении числа узлов сетки в рассматриваемой области с криволинейной границей имеет место сходимость приближенных собственных значений и собственных функций краевой задачи к точным собственным значениям и собственным функциям. При этом структура конечных рядов Фурье приближенных решений сближается со структурой бесконечного ряда Фурье, представляющего собой точное решение начально-краевой задачи. Метод дает сколь угодно точные приближенные аналитические решения начально-краевой задачи, по структуре аналогичные точному решению, и открывает новые возможности классического метода Фурье.

Алгоритм обобщенного метода Фурье. На примере первой начально-краевой задачи рассматривается алгоритм обобщенного метода Фурье для областей с криволинейными границами. Первые шаги алгоритма обобщенного

Образец для цитирования
Леонтьев В. Л. Применение метода разделения переменных при решении эволюционно-краевых задач для областей с криволинейными границами / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 133–136.

Сведения об авторе
Виктор Леонтьевич Леонтьев http://orcid.org/0000-0002-8669-1919
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; Институт передовых производственных технологий; e-mail: leontiev_vl@spbstu.ru

метода Фурье для областей с криволинейной границей совпадают с аналогичными шагами классического метода Фурье. Решение также разыскивается в виде произведения функции, зависящей только от времени, и функции, зависящей от пространственных координат. Подстановка произведения функций в дифференциальное уравнение начально-краевой задачи приводит к краевой задаче Штурма-Лиувилля. При разделении переменных из постановки начально-краевой задачи также следует уравнение задачи Коши, решение которой связано посредством параметра с решением задачи Штурма-Лиувилля, и два начальных условия.

Дальнейшие шаги алгоритма обобщенного метода Фурье, предназначенного для решения начально-краевых задач в случае двумерных областей с криволинейными границами, отличаются от соответствующих шагов классического алгоритма, поскольку связаны с применением ОФФ при построении последовательности приближенных аналитических решений в форме конечных обобщенных рядов Фурье и с предельным переходом в этой последовательности к точному решению первой начально-краевой задачи — бесконечному ряду Фурье. Нетривиальное решение краевой задачи Штурма-Лиувилля ищется в виде линейной комбинации тензорных произведений двух функций одного аргумента, взятых попарно из двух систем сеточных ОФФ [1]. Двумерная область с криволинейной границей вписывается в прямоугольную область, которая разбивается сеткой на части, определяющие конечные носители сеточных ОФФ.

Для определения величин неизвестных постоянных коэффициентов линейной комбинации ОФФ используются проекционные условия метода Бубнова—Галеркина. Формируется однородная система линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются указанные коэффициенты. Те значения параметра, появляющегося на этапе разделения переменных, при которых система имеет нетривиальные решения, являются собственными значениями проекционно-сеточного оператора, полученного с помощью проекционного алгоритма Бубнова—Галеркина на основе исходного дифференциального оператора, а также собственными значениями краевой задачи Штурма—Лиувилля, записанной в проекционной форме. Матрица системы уравнений — вещественная и симметричная, а, следовательно, все собственные значения и собственные векторы этой матрицы имеют вещественные значения, причем все ее собственные векторы линейно независимы и попарно ортогональны, в том числе и в случае, когда есть кратные собственные значения. Собственные значения положительны, поскольку матрица — не только симметричная и вещественная, но и положительно определенная в силу того, что матрица возникла в проекционных условиях на основе скалярного произведения, примененного к положительно определенному, в случае рассматриваемого граничного условия, оператору. Строится конечная сумма (по индексам найденных собственных значений) произведений функций, соответствующих этим собственным значениям. Сомножителями являются решения задачи Коши, возникающей после разделения переменных, для найденных собственных значений и конечный обобщенный ряд ОФФ-Фурье — аналитическое решение задачи Штурма—Лиувилля в проекционной форме. Коэффициенты конечного ряда определяются классическими формулами для коэффициентов Фурье, выражающими их через функции, заданные в двух начальных условиях, и

через ОФФ. Получаемый конечный ряд Фурье удовлетворяет уравнениям задачи Штурма—Лиувилля в проекционной форме, уравнению задачи Коши, а также граничному условию и двум начальным условиям, то есть является приближенным аналитическим решением первой начально-краевой задачи в случае области с криволинейной границей.

При сгущении сеток и, соответственно при увеличении числа используемых ОФФ, собственные функции и собственные значения оператора задачи, записанной в равносильной проекционной форме, после ее дискретизации сходятся к соответствующим собственным функциям и собственным значениям оператора исходной задачи. Доказательство сходимости собственных функций проводится на основе рассмотрения вспомогательного квадратичного функционала, имеющего в стационарной точке минимум и равного нулю в этой точке. Поэтому задача минимизации функционала сводится к задаче аппроксимации точных собственных функций линейными комбинациями ОФФ, то есть к задаче, решение которой содержится в [1], где имеются соответствующие теоремы об аппроксимации, определяющие точность аппроксимации и скорость сходимости, зависящие от типа конкретных систем базисных ОФФ. При увеличении числа узлов сетки области приближенные решения задачи Штурма— Лиувилля, то есть приближенные собственные функции этой задачи, сходятся по норме пространства Соболева к ее точным решениям — собственным функциям. При этом неограниченно возрастает число собственных значений и собственных функций краевой задачи в проекционной форме, а, следовательно, конечная сумма в пределе переходит в бесконечный ряд Фурье. Такой ряд является единственным решением исходной начально-краевой задачи, что следует из теоремы [2, стр. 88–91], основанной на теореме Стеклова [2, стр. 87].

Заключение. В работах [3–6] показано, что сочетание таких свойств сеточных базисных ОФФ, как финитность и ортогональность, определяет высокую эффективность использования ОФФ в создании новых интегральных преобразований, нового потенциала взаимодействия атомов, в механике деформируемого твердого тела (упругость и пластичность, статика и динамика, линейные и нелинейные задачи, стержни, пластины и оболочки, трехмерные тела). Здесь раскрываются возможности ОФФ в обобщении классического метода математической физики, приводящем к включению в область применения метода разделения переменных задач для областей с криволинейными границами.

Библиографический список

1. Леонтьев В. Л. *Ортогональные финитные функции и численные методы.* Ульяновск: УлГУ, 2003. 178 с.
2. Арсенин В. Я. *Методы математической физики и специальные функции.* М.: Наука, 1974. 430 с.
3. Леонтьев В. Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанный с использованием ортогональных финитных функций // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2002. № 3. С. 117–126.
4. Леонтьев В. Л., Риков Е. А. Интегральные преобразования, связанные с ортогональными финитными функциями, в задачах спектрального анализа сигналов // *Математическое моделирование*, 2006. Т. 18, № 7. С. 93–100.

5. Леонтьев В. Л., Михайлов И. С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // *Нано- и микросистемная техника*, 2011. № 9(134). С. 48–50.
6. Леонтьев В. Л., Мелентьев А. Ю. Сеточные методы расчета криволинейных стержней // *Математическое моделирование*, 2003. Т. 15, № 10. С. 95–104.

Method of separation of variables in solution of boundary value problems for domains with curvilinear boundaries

V. L. Leontiev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29, Polytechnicheskaya st., Saint Petersburg, 195251, Russian Federation.

Abstract

The generalization of method of separation of variables is presented. That is connected with orthogonal finite functions in first boundary value problem for domain with curvilinear boundary. Sequence of finite Fourier series converges to exact solution of problem – infinite Fourier series, in every moment of time. Similar generalization of Fourier method is valid in boundary value problems of other types, and also for 3D domains.

Keywords: method of separation of variables, Fourier method, orthogonal finite functions, finite series, boundary value problem, domain with curvilinear boundary.

Please cite this article in press as:
Leontiev V. L. Method of separation of variables in solution of boundary value problems for domains with curvilinear boundaries, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 133–136 (In Russian).

Author's Details:

Victor L. Leontiev http://orcid.org/0000-0002-8669-1919
Doct. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Institute of Advanced Manufacturing Technologies; e-mail: leontiev_vl@spbstu.ru

Вычисление производных аналитического сигнала в базисе функций Чебышева—Эрмита

Р. Т. Сайфуллин, А. В. Бочкарев

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Объектом исследования является базис функций Чебышева—Эрмита и возможность разложения сигналов аналитических приборов по этому базису. Цель работы заключается в формировании базиса для получения производных сигналов различных порядков. Для формирования базиса рассматривается представление функций Чебышева—Эрмита через многочлены Эрмита. Для дифференцирования базисных функций используется формула Лейбница. Полученный базис позволяет найти производную сигнала произвольного порядка.

Ключевые слова: аналитический сигнал, функции Чебышева—Эрмита, базис производных.

Введение. Развитие аналитического приборостроения идет по пути улучшения характеристик аналитических приборов и внедрения новых методов анализа результатов измерений (аналитических сигналов). Одним из таких методов может стать проекционная схема кодирования-декодирования сигналов, основанная на разложении сигнала по функциям Чебышева—Эрмита [1].

1. Алгоритм кодирования-декодирования в базисе функций Чебышева—Эрмита. Функции Чебышева—Эрмита определяются следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x), \tag{1}$$

где $\alpha_n = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ — нормирующая константа; $H_n(x)$ — стандартизированный многочлен Чебышева—Эрмита степени n:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

Образец для цитирования
Сайфуллин Р. Т., Бочкарев А. В. Вычисление производных аналитического сигнала в базисе функций Чебышева—Эрмита / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 137–139.

Сведения об авторах

Сайфуллин Раухат Талгатович http://orcid.org/0000-0001-7047-3979
доктор технических наук, профессор; профессор; каф. информационно-измерительной техники; e-mail: ims@samgtu.ru

Бочкарев Андрей Владимирович http://orcid.org/0000-0003-1615-5659
аспирант; ассистент; каф. информационно-измерительной техники;
e-mail: thetearm@gmail.com

Представление сигнала $f(x)$ с помощью n функций разложения (алгоритм кодирования) заключается в нахождении коэффициентов c_n:

$$c_n = \int_{-\tau_n}^{\tau_n} f(x) \cdot \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

где $\big[-\tau_n, \tau_n\big]$ — отрезок, на котором локализована функция φ_n.

Алгоритм декодирования с помощью N коэффициентов разложения выражается формулой:

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cdot \varphi_n(x). \tag{2}$$

Описанный алгоритм обладает сглаживающим свойством [2] и позволяет получить не только сглаженный сигнал, но также и его сглаженную производную k порядка, при наличии соответствующего базиса.

2. Формирование базиса производных функций Чебышева—Эрмита. Продифференцируем (1) k раз:

$$\frac{d^k \varphi_n(x)}{dx^k} = \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{d^k H_n(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^k}. \tag{3}$$

Используя формулу Лейбница возможно раскрыть производную k-того порядка произведения функций:

$$\frac{d^k uv}{dx^k} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{d^{k-i} u}{dx^{k-i}} \cdot \frac{d^i v}{dx^i},$$

где C_k^i — биномиальный коэффициент.

Используя данную формулу, относительно (3) получим:

$$\frac{d^k \varphi_n(x)}{dx^k} = \frac{1}{\alpha_n} \cdot \sum_{i=0}^{k} \left[C_k^i \frac{d^{k-i} H_n(x)}{dx^{k-i}} \cdot \frac{d^i e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^i} \right]. \tag{4}$$

Найдем обе присутствующих в (4) производные по отдельности:

$$\frac{d^{k-i} H_n(x)}{dx^{k-i}} = n! \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^k \cdot \lambda_m^n \cdot dX_{n-2m}^{k-i}, \tag{5}$$

$$\frac{d^i e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^i} = (-1)^i \cdot He_i(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{6}$$

где $He_n(x)$ — «статистические» полиномы Эрмита [1],

$$dX_{n-2m}^{k-i} = \begin{cases} \dfrac{(n-2m)!}{(n-2m-k+i)!} x^{n-2m-k+i}, & n-2m \geqslant k-i, \\ 0, \quad n-2m < k-i. \end{cases} \tag{7}$$

Подставим (7), (6) и (5) в (4):

$$\frac{d^k\varphi_n(x)}{dx^k} = \\ = \frac{n!}{\alpha^n}\cdot\sum_{i=0}^{k}\left\{C_k^i\cdot(-1)^i\cdot He_i(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{m=0}^{n/2}\left[(-1)^k\cdot\lambda_m^n\cdot dX_{n-2m}^{k-i}\right]\right\}. \quad (8)$$

Заключение. Полученное выражение (8) задает базис производной k-того порядка n-й функции Чебышева—Эрмита и может быть использован для восстановления k-той сглаженной производной исходного сигнала, по рассчитанным заранее коэффициентам разложения в базисе Чебышева—Эрмита. Для этого необходимо использовать алгоритм декодирования (2), в котором базисную функцию $\varphi_n(x)$ следует заменить на (8).

Библиографический список

1. Сеге Г. *Ортогональные многочлены.* М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
2. Балакин Д. А., Штыков В. В. Построение ортогонального банка фильтров на основе преобразований Эрмита для обработки сигналов // *Журнал радиоэлектроники*, 2014. № 9. С. 1–15.

Calculation of analytical signal derivatives in the basis of Chebyshev-Hermite functions

R. T. Sayfullin, A. V. Bochkarev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The main objectives of study are basis of the Chebyshev-Hermite (also Hermite) functions and application of this basis for signal decomposition. The purpose of this work is to form basis for obtain signal derivatives of different order. To form this basis Chebyshev-Hermite functions are considered using Hermite polynomials. For taking derivatives of Chebyshev-Hermite basis functions, the Leibniz formula is used. Obtained basis can be used for taking arbitrary order derivatives of signals.

Keywords: analytical signal, Chebyshev-Hermite functions, derivative basis.

Please cite this article in press as:
Sayfullin R. T., Bochkarev A. V. Calculation of analytical signal derivatives in the basis of Chebyshev-Hermite functions, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 137–139 (In Russian).

Authors' Details:

Rauhat T. Sayfullin http://orcid.org/0000-0001-7047-3979
Dr. Tech. Sci., Professor; Professor; Dept. of Information-Measuring Technology;
e-mail: imsv@samgtu.ru

Andrew V. Bochkarev http://orcid.org/0000-0003-1615-5659
Postgraduate student; Teaching Assistant; Dept. of Information-Measuring Technology;
e-mail: thetearm@gmail.com

Гармонические интерполяционные всплески в краевой задаче Неймана в кольце

Д. А. Ямковой

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Россия, 620108, Екатеринбург, Софьи Ковалевской, 16.

Аннотация

В данной статье рассматривается краевая задача Неймана в кольце. Находится решение задачи Неймана в виде ряда по системе интерполяционно-ортогональных периодических, гармонических в кольце всплесков, построенных на основе всплесков Мейера. В результате получено точное решение поставленной задачи в виде ряда по системе указанных выше базисов всплесков, а также получена численная оценка погрешности аппроксимации частичными суммами построенного ряда.

Ключевые слова: интерполяционные всплески, краевая задача Неймана.

Введение. В работах [1, 2] для решения краевой задачи Дирихле в единичном круге и кольце были использованы интерполяционные и интерполяционно-ортогональные 2π-периодические всплески из статьи [3]. В данной работе эти же всплески применяются для решения краевой задачи Неймана в кольце $R_\rho := \{re^{ix} : 0 < \rho < r < 1, 0 \leqslant x < 2\pi\}$.

1. Интерполяционно-ортогональные 2π-периодические всплески. На основе преобразования Фурье функции типа Мейера $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$, $\varepsilon \in (0, 1/3]$ (см., например, [4]) в [1] построены системы интерполяционно-ортогональных 2π-периодических всплесков $\{\Phi_s^{j,k}(e^{ix}) : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ (при $s = 3$ — это интерполяционные в $C_{2\pi}$ на сетках $\{x_j^k := 2\pi k/2^j : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$, а при $s = 1, 2$ — интерполяционные в $C_{2\pi}$ на тех же сетках и одновременно ортогональные в $L^2(0, 2\pi)$), которые порождают кратномасштабный анализ $\{V_s^j\}_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Всплески $\Phi_s^{j,k}(e^{ix})$ — тригонометрические полиномы по системе $\{e^{i\nu x} : |\nu| < 2^{j-1}(1+\varepsilon)\}$, которые легко продолжаются до гармонических при $r < 1$ полиномов $\Phi_s^{j,k}(re^{ix})$ и гармонических при $r > \rho$ полиномов $\Phi_s^{j,k}\left(\frac{\rho}{r}e^{ix}\right)$, явный вид которых можно найти в [2].

2. Применение к решению задачи Неймана в кольце. Постановка задачи Неймана в кольце R_ρ:

Образец для цитирования
Ямковой Д. А. Гармонические интерполяционные всплески в краевой задаче Неймана в кольце / *Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»* (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2019. С. 140–143.

Сведения об авторе
Дмитрий Анатольевич Ямковой http://orcid.org/0000-0002-4390-622X
аспирант; младший научный сотрудник; отдел аппроксимации и приложений;
e-mail: dmitriiyamkovoi@bk.ru

$$\begin{cases} \Delta U(r,x) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad U \in C^1(\overline{R_\rho}) \cap C^2(R_\rho), \\ \dfrac{\partial U}{\partial r}(1,x) = g_1(x) \in C_{2\pi}, \ \dfrac{\partial U}{\partial r}(\rho,x) = g_\rho(x) \in C_{2\pi}, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \big(g_1(x) - g_\rho(x)\big)dx = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Из работы [5] следует, что решение задачи (1) существует, единственно с точностью до аддитивной константы и представимо в виде

$$U(r,x) = U_1(r,x) + U_\rho(r,x) + A\ln r,$$

где $U_1(r,x)$ и $U_\rho(r,x)$ — гармонические в R_ρ и непрерывно-дифференцируемые в $\overline{R_\rho}$, A — некоторая константа.

Определим, как в [1], при $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ интерполяционную проекцию

$$S_{s,2^j}(x;f) = \sum_{k=0}^{2^j-1} f\big(\frac{2\pi k}{2^j}\big)\Phi_s^{j,k}(e^{ix})$$

функции f из $C_{2\pi}$ на V_s^j. Можно показать, что при $q = \{1,\rho\}$ функции $g_q \in C_{2\pi}$ из (1) представимы в виде равномерно сходящихся рядов по функциям $\Phi_s^{j+1,2k+1}(e^{ix})$:

$$g_q(0) + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} \big(g_q(\cdot) - S_{s,2^j}(\cdot;g_q)\big)(x_{2k+1}^{j+1})2^{-(j+1)}\Phi_s^{j+1,2k+1}(e^{ix}). \tag{2}$$

Также можно показать, что при $q = \{1,\rho\}$ функции $U_1(r,x)$ и $U_\rho(r,x)$ представимы в виде равномерно сходящихся в $\overline{R_\rho}$ рядов по гармоническим полиномам $\Phi_s^{j+1,2k+1}(re^{ix})$ и $\Phi_s^{j+1,2k+1}(\frac{\rho}{r}e^{ix})$, соответственно:

$$U_q(q,0) + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} \Big(U_q(q,\cdot) - S_{s,2^j}\big(1,\cdot;U_q(q,\cdot)\big)\Big)\times \\ \times \Big(x_{2k+1}^{j+1}\Big)\Phi_s^{j+1,2k+1}\big(qr^{\frac{2q-1-\rho}{1-\rho}}e^{ix}\big). \tag{3}$$

Обозначим стоящие в рядах (2) и (3) коэффициенты при $e^{i\nu x}$ и $r^{|\nu|}e^{i\nu x}$, $\big(\frac{\rho}{r}\big)^{|\nu|}e^{i\nu x}$ через $g_q^{j,k,\nu}$ $(q = 0,\rho)$ и $U_1^{j,k,\nu}$, $U_\rho^{j,k,\nu}$, соответственно. Используя условия задачи (1), представление для $U(r,x)$ и оценку из теоремы в работе [1], получим следующую теорему.

Теорема. *В условиях задачи* (1) *при каждом* $s = 1, 2, 3$

$$U(r,x) = U_1(1,0) + U_\rho(\rho,0) + \\ + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{\nu \in \Delta_\varepsilon^{j+1} \cap \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(U_1^{j,k,\nu} r^{|\nu|} + U_\rho^{j,k,\nu} \left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu \right) e^{i\nu x}, \quad (4)$$

где ряд в правой части сходится равномерно в $\overline{R_\rho}$, $U_1(1,0)$, $U_\rho(\rho,0)$ — *произвольные константы, а* $U_q^{j,k,\nu} = \frac{g_1^{j,k,\nu} q^{|\nu|} - g_\rho^{j,k,\nu} \rho (\frac{\rho}{q})^{|\nu|}}{|\nu| \left(1 - \rho^{2|\nu|}\right)}$ $(q = 1, \rho)$. *Также при любом фикисрованном* $J \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *частичная сумма* $S_{s,2^J}(U(r,x))$ *ряда из правой части* (4) *совпадает с гармоническим полиномом в* R_ρ, *порождаемым интерполяционными проекциями* $S_{s,2^J}(x; U(1,x))$, $S_{s,2^J}(x; U(\rho,x))$ *на* V_s^J, *и приближает решение* $U(r,x)$ *задачи* (1) *со следующей оценкой точности:*

$$\|U(r,x) - S_{s,2^J}(U(r,x))\|_{C(R_\rho)} \leqslant (1 + \|S_{s,2^j}\|) \big(E_{N_{\varepsilon,J}}(g_1)_{C_{2\pi}} + E_{N_{\varepsilon,J}}(g_\rho)_{C_{2\pi}} \big),$$

где $E_{N_{\varepsilon,J}}(f)_{C_{2\pi}}$ — *наилучшее приближение функции* $f \in C_{2\pi}$ *тригонометрическими полиномами порядка* $N_{\varepsilon,J} = [2^{J-1}(1-\varepsilon)]$, *а оценку нормы оператора интерполяционного проектрования* $S_{s,2^J}$ *на* V_s^J *можно найти в теореме из работы* [1].

Заключение. Полученная теорема дает решение задачи (1) в виде ряда с удобными для вычисления коэффициентами, а также важную для практики оценку погрешности аппроксимации решения частичными суммами $S_{s,2^J}$ этого ряда (полиномами степени $\leqslant 2^{J-1}(1+\varepsilon)$) по порядку совпадающую с $E_{N_{\varepsilon,J}}$.

Библиографический список

1. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Интерполяционные всплески в краевых задачах / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 22, 2016. С. 257–268. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-257-268.
2. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Гармонические интерполяционные всплески в кольце / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 24, 2018. С. 225–234. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-225-234.
3. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Интерполяционно-ортогональные системы всплесков / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 14, 2008. С. 153–161. doi: 10.1134/S0081543809050083.
4. Offin D., Oskolkov K. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // *Constr. Approx.*, 1993. Т. 9, № 2-3. С. 319–325. doi: 10.1007/BF01198009.
5. Голузин Г. М. Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // *Матем. сб.*, 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.

Harmonic interpolating wavelets in Neumann boundary value problem in a ring

D. A. Yamkovoi

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
16, S.Kovalevskaya, Yekaterinburg, 620108, Russia.

Abstract

In this paper we discuss the Neumann boundary value problem in a ring. Our goal of research is to find out the solution for the Neumann problem in the form of series in a wavelet system of interpolating-orthogonal periodic, harmonic in a ring wavelets which were constructed on the basis of Meyer-type wavelets. As a result we obtain the exact solution for the problem in the form of series in the wavelet system mentioned above and the numerical bound of the approximation error.

Keywords: interpolating wavelets, Neumann boundary value problem.

Please cite this article in press as:
Yamkovoi D. A. Harmonic interpolating wavelets in Neumann boundary value problem in a ring, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 140–143 (In Russian).

Author's Details:

Dmitry A. Yamkovoi http://orcid.org/0000-0002-4390-622X
Postgraduate Student; Research Assistant; Dept. of Approximation and Applications;
e-mail: dmitriiyamkovoi@bk.ru

On machine learning based theorem prover for first order minimal logic

A. R. Baghdasaryan

Yerevan State University,
Faculty of Informatics and Applied Mathematics,
1 Alex Manoogian, Yerevan, 0025, Republic of Armenia.

Abstract

Automated theorem provers based on different systems of minimal logic experience some difficulties because of many problems. One of them is a stoup selection rule, when a formula from the context should be selected to be considered as a stoup. Neural networks are added to these systems of minimal logic and they are used to determine which formula from the context will become a stoup. This partially solves the problem of rule selection and gives reduction of time in theorem proving.

Keywords: minimal logic, theorem proving, cut elimination, machine learning, recurrent neural networks.

Introduction. There are different kind of systems in which rule selection problem leads to proof search inefficiency issues. Because of that problem automated theorem provers based on that systems experience some difficulties. Two systems for propositional fragment of minimal logic (`SwMin` and `ScMin`) were introduced in [1]. In these systems the problem of rule selection remains unsolved. There is a stoup selection rule in `SwMin`, when a formula from the context should be selected to be considered as a stoup. Though this is insufficient as it requires many branches to prove, which may be unnecessary. We extend those systems to the minimal fragments of first order predicate logic `SwMinPred` and `ScMinPred` and prove their equivalence to Hentzen type systems considered in [2]. We developed prover `SwProv` based on `SwMinPred` system. To avoid rule selection problems the neural networks are deployed in `SwProv` prover (`SwNNProv`), which helps us to make a "right" decision. At each step of the proof, if there are multiple choices of the inference rule to be applied at the current step, neural network is used to determine which formula from the context will become a stoup.

1. Sequent To Vector Transformation. Firstly all formulas in sequents are represented in Skolem standard form. To be able to use neural networks in the proof search it is necessary to train network model against provable sequents. To proceed with that we introduce numerical representation for the sequents assigning a specific number to each symbol. Based on that representation similar formulas will get identical vectors. After that autoencoder [3] is trained to get

Please cite this article in press as:
Baghdasaryan A. R. On machine learning based theorem prover for first order minimal logic, In: *Proceedings of the Eleventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems"* (May, 27–30, 2019, Samara, Russian Federation), Vol. 2, Samara State Technical Univ., Samara, 2019, pp. 144–145.

Authors' Details:
Ashot R. Baghdasaryan ✉ MSc Student; Dept. of Informatics and Applied Mathematics;
e-mail: baghdasaryana95@gmail.com

fixed length encoding for each sequent. As a result we get numerical representation for sequents.

2. Neural Networks in Proof Search. Standard library for first-order predicate logic problems are used as a training dataset. For each element in training set `SwProv` prover is run and which generates training examples. At each point of proof tree, where a stoup formula has to be selected, all sequents in that branch of tree are considered and sequence of vectors is generated by "Sequent to Vector" transformation. To differentiate successful outcomes while training neural network one needs to take numerical representation for each stoup candidate formula and corresponding ground truth label (whether this is the right selection).

Used neural network model consists of gated reclified unit (GRU) [4] as recurrent layer and 2-dense layers with skip connections [5] and residual blocks [6].

The output of recurrent layer (feature vector extractor module) is concatenated with numerical representation of stoup candidate and then is mapped to 2-length one-hot encoded vector via dense layer with softmax activation function. As a final step cross entropy is used as a loss function.

Results. In result of constructing new proof systems for minimal logic of predicates and deploying concept of neural network in the prover experiments revealed proof search space reduction and the level of accuracy up to 75% training 150 epochs. Compared to the prover without neural network time spent for the proof is reduced for almost twice.

References

1. Baghdasaryan A., Bolibekyan H. On some systems of minimal predicate logic with history mechanism, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 232-233.
2. Chubaryan A.A., Bolibekyan H.R On the sequent systems of weak arithmetics, *Doklady National'noy Akademii Nauk RA*, 2002, vol. 102, no. 3, pp. 214-218 (In Russian).
3. Pierre Baldi Autoencoders, Unsupervised Learning, and Deep Architectures, In: *Proceedings of ICML Workshop on Unsupervised and Transfer Learning*, Proceedings of Machine Learning Research, 27; ed. Isabelle Guyon and Gideon Dror and Vincent Lemaire and Graham Taylor and Daniel Silver. Bellevue, Washington, USA, PMLR, 2012, pp. 37–49.
4. Cho, Kyunghyun and van Merrienboer, Bart and Bahdanau, Dzmitry and Bengio, Yoshua On the Properties of Neural Machine Translation: Encoder–Decoder Approaches, In: *Proceedings of SSST-8, Eighth Workshop on Syntax, Semantics and Structure in Statistical Translation.* Doha, Qatar, Association for Computational Linguistics, 2014, pp. 103–111, https://www.aclweb.org/anthology/W14-4012. doi: 10.3115/v1/W14-4012.
5. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun Deep Residual Learning for Image Recognition, 2015, vol. 17.
6. Olaf Ronneberger, Philipp Fischer, and Thomas Brox U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation, In: *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2015.* Cham, Springer International Publishing, 2015, pp. 234–241.

Авторский указатель

Научное издание

Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»

(27–30 мая 2019 г., Самара, Россия)

Том 2

Под редакцией В. П. Радченко

Ответственный за выпуск: В. П. Радченко

Оригинал-макет, компьютерная вёрстка:
М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова
(Typeset by LaTeX 2_ε)

Подп. в печать 16.05.19. Формат 70×108 $^1/_{16}$.
Усл.-печ. л. 12.17. Тираж 80 экз. Рег. № 77. Заказ № 397.

ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главн. корп.

Отпечатано в типографии
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корп. № 8.

САМАРСКИЙ ПОЛИТЕХ
Опорный университет

Математическое моделирование и краевые задачи

Материалы
Одиннадцатой Всероссийской научной
конференции с международным участием

г. Самара, 27—30 мая 2019 г.

Том 2